Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak Universität Konstanz Wintersemester 2021/2022

Übungen zur Vorlesung Theorie partieller Differentialgleichungen

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 5

Aufgabe 18. (4 Punkte)
Definition: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^0(\Omega)$. Dann erfüllt u die Ungleichung $\Delta u \geq 0$ im Viskositätssinne, falls für jeden Punkt $x_0 \in \Omega$, jede Kugel $B_r(x_0) \subset \Omega$, $r \in \mathbb{R}_+$, und jede Funktion $\varphi \in C^2(B_r(x_0))$ mit

$$u(x_0) = \varphi(x_0)$$

und

$$u(x) \leq \varphi(x) \quad \text{für } x \in B_r(x_0)$$

folgt, dass

$$\Delta\varphi(x_0) \geq 0.$$

Analog definiert man $\Delta u \leq 0$ im Viskositätssinne. Falls $\Delta u \geq 0$ und $\Delta u \leq 0$ im Viskositätssinne gelten, so heißt u im Viskositätssinne harmonisch oder eine Viskositätslösung von $\Delta u = 0$.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^0(\Omega)$. Zeige, dass u genau dann im Viskositätssinne harmonisch ist, wenn u (nach bisheriger Definition) harmonisch ist.

Tipp: Zeige, dass eine Viskositätslösung von $\Delta u = 0$ auch C^0-subharmonisch sowie C^0-superharmonisch ist.

Aufgabe 19. (4 + 2* Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit $\partial\Omega \in C^2$. Seien $f_k, f \in C^0(\overline{\Omega})$ und $\varphi_k, \varphi \in C^0(\partial\Omega)$ für $k \in \mathbb{N}$. Seien $u_k \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ Lösungen der Dirichletprobleme

$$\begin{cases} \Delta u_k = f_k & \text{in } \Omega\,, \\ u_k = \varphi_k & \text{auf } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

Zeige die folgenden Aussagen:

(i) Gilt $f_k \to f$ in $C^0(\overline{\Omega})$ und $\varphi_k \to \varphi$ in $C^0(\partial\Omega)$ für $k \to \infty$, so konvergiert u_k in $C^0(\Omega)$.
(ii*) Gilt $f_k = 0 = f$, so ist $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ und es gilt

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = \varphi\,, & \text{auf } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

Hinweis zu (i): Zeige mit Hilfe des Maximumprinzips und $x \mapsto \varepsilon|x|^2$ eine Abschätzung der Form

$$\|u_k - u_\ell\|_{C^0(\overline{\Omega})} \leq c \cdot \|f_k - f_\ell\|_{C^0(\overline{\Omega})} + c\|\varphi_k - \varphi_\ell\|_{C^0(\partial\Omega)}\,.$$

Aufgabe 20. (4 Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^2$.

(i) Zeige, dass es ein $m \in \mathbb{N}$ und offene, beschränkte Mengen $U_i, V_i \subset \mathbb{R}^n$ für $i \in \{1, \ldots, m\}$ gibt, so dass $U_i \Subset V_i$ ist, $\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^m U_i$ gilt und so dass $\partial\Omega \cap V_i$ Graph einer C^2-Funktion u_i ist und $\Omega \cap V_i$ jeweils auf einer Seite dieses Graphen liegt. Zeige, dass man die Mengen $(V_i)_{i\in\{1,\ldots,m\}}$ so wählen kann, dass u_i die Gradientenabschätzung $\|Du_i\| \leq \frac{1}{8}$ erfüllt.

(ii) Zeige, dass Ω eine gleichmäßige äußere (und innere) Kugelbedingung erfüllt.
Hinweis: Sei $i \in \{1, \dots, m\}$ fest. Dann ist $\partial\Omega \cap V_i$ Graph einer C^2-Funktion u. Sei $x = (\hat{x}, u(\hat{x})) \in \partial\Omega \cap U_i$. Sei $r \in \mathbb{R}_+$ klein. Bestimme $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$, so dass die Funktion

$$v : B_r^{n-1}(\hat{x}) \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto \sqrt{r^2 - |y - \hat{x} - \bar{x}|^2} - \sqrt{r^2 - |\bar{x}|^2} + u(\hat{x})$$

die Bedingung $Dv(\hat{x}) = Du(\hat{x})$ erfüllt. Zeige dann mit Hilfe der Taylorentwicklung, dass für kleine $r > 0$ die Funktion $u - v : B_r^{n-1}(\hat{x}) \setminus \{\hat{x}\} \to \mathbb{R}$ positiv ist.

Aufgabe 21 (Poissonsche Darstellungsformel für einen Halbraum)**.** (4 Punkte) Sei

$$K(x,y) = \frac{2x_n}{n\omega_n} \frac{1}{|x-y|^n} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}^n_+, y \in \partial\mathbb{R}^n_+$$

Sei $g \in C(\mathbb{R}^{n-1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ und $u(x) = \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x,y)g(y)dy$. Zeige, dass

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathbb{R}^n_+}} u(x) = g(x_0) \text{ für alle } x_0 \in \partial\mathbb{R}^n_+$$

gilt.

Hinweis: Es gilt

$$\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x,y)\, dy = 1 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n_+.$$