Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak Universität Konstanz Wintersemester 2021/2022

Übungen zur Vorlesung Theorie partieller Differentialgleichungen

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 3

Aufgabe 11. (8 Punkte) Sei $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$. Sei $f \in C^0(\overline{\Omega})$ und sei $u := \Phi * f = \int_\Omega \Phi(x-y) f(y)\, dy$, wobei Φ die Fundamentallösung der Laplacegleichung sei. Zeige die folgenden Aussagen:

(i) Für $1 \leq i \leq n$ sei
$$v_i(x) = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi(x-y) f(y) dy.$$
Dann ist u stetig partiell differenzierbar und $u_i = v_i$.
Anleitung: Sei $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ mit $0 \leq \eta \leq 1$, $0 \leq \eta' \leq 2$, $\eta(t) = 0$ für $t \leq 1$ und $\eta(t) = 1$ für $t \geq 2$. Für $\varepsilon > 0$ definieren wir $\eta_\varepsilon(t) := \eta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$ und die Funktion
$$w_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_\Omega \Phi(x-y) \eta_\varepsilon(|x-y|) f(y) dy.$$
Zeige, dass für kompakte Mengen $K \subset \Omega$
$$\sup_{x \in K} |w_\varepsilon(x) - u(x)| \to 0 \text{ für } \varepsilon \to 0$$
und
$$\sup_{x \in K} |D_i w_\varepsilon(x) - v_i(x)| \to 0 \text{ für } \varepsilon \to 0$$
gelten.

(ii) Sei $f \in C^1(\overline{\Omega})$. Dann ist u zweimal stetig differenzierbar und eine Lösung der Gleichung $-\Delta u = f$ in Ω.

Aufgabe 12. (4 Punkte) Beweise den Satz von Liouville mit Hilfe der Mittelwerteigenschaft für harmonische Funktionen.

Aufgabe 13. (4 Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^0(\Omega)$. Nehme an, dass für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$
$$\int_\Omega u(x) \Delta\varphi(x)\, dx = 0$$
gilt. Zeige, dass u in Ω harmonisch ist.

Anleitung: Zeige, dass

(i) die Mollifizierungen u_ε harmonisch sind (benutze die obige Eingenschaft von u!) und
(ii) u die Mittelwerteigenschaft erfüllt.