Fachbereich Mathematik und Statistik — Universität Konstanz
Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak — Wintersemester 2021/22

Übungen zur Vorlesung Geometrische ODEs

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 8

Aufgabe 8.1 (4 Punkte)**.** Seien $n \ge 2$, $R > 0$ und sei $u \in C^2((0,R)) \cap C^0([0,R))$ eine Funktion, so dass

$$U(x,t) := u(|x|) + t$$

eine translatierende Lösung des Gaußkrümmungsflusses ist. Nach Blatt 5 wissen wir, dass u beziehungsweise $\varphi := u'$ eine Lösung der Gleichung

$$u''(r) = \left(\frac{r}{u'(r)}\right)^{n-1} \left(1 + (u'(r))^2\right)^{\frac{n+1}{2}}$$

beziehungsweise

$$\varphi'(r) = \left(\frac{r}{\varphi(r)}\right)^{n-1} \left(1 + \varphi(r)^2\right)^{\frac{n+1}{2}}$$

ist. Wir legen $u(0) = 0$ fest, es gilt zusätzlich $u'(0) = 0$.

(i) Löse die Differentialgleichung für u numerisch und plotte das Resultat für verschiedene Werte der Dimension n.
(ii) Bestimme die Differentialgleichung für die Inverse $\psi = \varphi^{-1}$.
(iii) Bestimme eine Lösungsformel für die Differentialgleichung von ψ.
(iv) Warum gibt es für den Gaußkrümmungsfluss keine flügelartigen translatierenden Lösungen?

Aufgabe 8.2 (4 Punkte)**.** Homothetisch schrumpfenden Lösungen des curve shortening flows sind durch die Gleichung

$$\langle x, \nu \rangle = \kappa \tag{8.1}$$

beschrieben, wobei $x\colon I \to \mathbb{R}^2$ die gesuchte Kurve bezeichnet, ν deren Normale und κ deren Krümmung. Die Vorzeichenkonventionen seien so gewählt, dass $\mathbb{S}^1$ eine Lösung ist.

(i) Wie erhält man aus einer Lösung von (8.1) durch Hinzufügen einer Zeitabhängigkeit eine Lösung des curve shortening flows?
(ii) Beweise, dass $E := \langle x, \nu \rangle \, \mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{2}}$ entlang von Lösungen konstant ist.
(iii) Wir verwenden Polarkoordinaten (r, φ) und beschreiben die Kurve durch eine Funktion $r(\varphi)$. Leite für $r(\varphi)$ die gewöhnliche Differentialgleichung

$$r''(\varphi) = r'(\varphi)^2 \left(\frac{2}{r(\varphi)} - r(\varphi)\right) + r(\varphi) - r(\varphi)^3$$

her.
(iv) Zeige, dass Lösungen dieser Differentialgleichung auf ganz $\mathbb{R}$ existieren.

Abgabe: Dienstag, 18.01.2022, 13:30 Uhr, in der Vorlesung.