Fachbereich Mathematik und Statistik — Universität Konstanz
Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak — Wintersemester 2021/22

Übungen zur Vorlesung Geometrische ODEs

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 5

Aufgabe 5.1 (4 Punkte)**.** In Analysis III haben wir die Differentialgleichung

$$\dot{\alpha}(t) = \left(1 + \alpha^2(t)\right)(1 - t \cdot \alpha(t))$$

betrachtet und gezeigt, dass

$$\alpha(t) = \frac{1}{t} + o\left(\frac{1}{t}\right)$$

für $t \longrightarrow \infty$ gilt.

Bestimme die nächsten beiden Terme in dieser Entwicklung und weise nach, dass dies die Asymptotik der Lösung beschreibt.

Aufgabe 5.2 (2+8+2 Punkte)**.** Seien $n \geq 2$, $R > 0$ und sei $u \in C^2((0,R)) \cap C^0([0,R))$ eine Funktion, so dass

$$U(x,t) := u(|x|) + t$$

eine (graphische rotationssymmetrische) translatierende Lösung des Gaußkrümmungsflusses ist.

(i) Leite eine gewöhnliche Differentialgleichung für u her. Überprüfe (hierzu sind keine Notizen nötig), dass diese Differentialgleichung graphische rotationssymmetrische translatierende Lösungen des Gaußkrümmungsflusses charakterisiert.

Rechne anschließend mit

$$u''(r) = \left(\frac{r}{u'(r)}\right)^{n-1} \left(1 + (u'(r))^2\right)^{\frac{n+1}{2}}$$

beziehungsweise

$$\varphi'(r) = \left(\frac{r}{\varphi(r)}\right)^{n-1} \left(1 + \varphi(r)^2\right)^{\frac{n+1}{2}}$$

weiter.

(ii) Zeige, dass die hergeleitete Differentialgleichung nahe $r = 0$ eine Lösung besitzt, so dass $U(\cdot, t)$ in der Nähe des Ursprungs von der Klasse C^2 ist.

(iii) Untersuche ob ein maximales $R > 0$ endlich oder unendlich ist.

Abgabe: Dienstag, 07.12.2021, 13:30 Uhr, in der Vorlesung.