Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak Universität Konstanz Wintersemester 2021/2022

Übungen zur Vorlesung Theorie partieller Differentialgleichungen

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 4

Aufgabe 14. (2 Punkte) Sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$ with $u = 0$ auf $\partial\Omega \in C^1$. Zeige dass die *Interpolationsungleichung*

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \le \varepsilon \int_\Omega (\Delta u)^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int_\Omega u^2$$

für alle $\varepsilon > 0$ gilt.

Aufgabe 15. (4 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$. Im Folgenden wird das Multinomialtheorem angenommen: Es gilt

$$(x_1 + \ldots + x_n)^k = \sum_{|\alpha|=k} \binom{|\alpha|}{\alpha} x^\alpha,$$

wobei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ ein Multiindex ist und

$$\begin{aligned} \binom{|\alpha|}{\alpha} &:= \frac{|\alpha|!}{\alpha!}, \\ \alpha! &:= \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdots \alpha_n!, \\ x^\alpha &:= x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \\ |\alpha| &:= \alpha_1 + \ldots + \alpha_n. \end{aligned}$$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch in Ω. Zeige, dass u reell analytisch in Ω ist.
Anleitung: Sei $x_0 \in \Omega$ und wähle $r := \frac{1}{4}\operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$.

(i) Sei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ein Multiindex mit $|\alpha| = k \in \mathbb{N}$. Zeige, dass es eine von α unabhängige Konstante $c > 0$ mit

$$\|D^\alpha u\|_{C^0(B_r(x_0))} \le c \left(\frac{2^{n+1} n^2 e}{r} \right)^k \alpha!$$

gibt, mit $\alpha! = \Pi_{i=1}^n \alpha_i!$. Verwende hierfür die Stirlingsche Formel

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k^{k+\frac{1}{2}}}{k! e^k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

(ii) Sei $r_0 := \frac{r}{2^{n+2} n^3 e}$. Zeige, dass die Taylorreihe von u um x_0 in $B_{r_0}(x_0)$ konvergiert.

Aufgabe 16. (4 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine reell analytische Funktion. Sei $\Omega' \subset \Omega$ eine nichtleere, offene Menge. Zeige, dass aus $f|_{\Omega'} = 0$ auch $f \equiv 0$ folgt.

Aufgabe 17. (6 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$. Sei $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ harmonisch.

(i) Sei u nach unten beschränkt. Zeige, dass u konstant ist.
(ii) Sei $k \in \mathbb{N}$. Nehme an es gibt eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$|u(x)| \le C(1 + |x|^k)$$

gilt. Zeige, dass u ein Polynom mit $\operatorname{grad} u \le k$ ist.