

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG THEORIE PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Abrufbar unter: <https://gaspard.janko.fr/de>

Blatt 3

Aufgabe 11. (8 Punkte) Sei $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$. Sei $f \in C^0(\overline{\Omega})$ und sei $u := \Phi * f = \int_{\Omega} \Phi(x-y)f(y) dy$, wobei Φ die Fundamentallösung der Laplacegleichung sei. Zeige die folgenden Aussagen:

(i) Für $1 \leq i \leq n$ sei

$$v_i(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi(x-y)f(y)dy.$$

Dann ist u stetig partiell differenzierbar und $u_i = v_i$.

Anleitung: Sei $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ mit $0 \leq \eta \leq 1$, $0 \leq \eta' \leq 2$, $\eta(t) = 0$ für $t \leq 1$ und $\eta(t) = 1$ für $t \geq 2$. Für $\varepsilon > 0$ definieren wir $\eta_{\varepsilon}(t) := \eta(\frac{t}{\varepsilon})$ und die Funktion

$$w_{\varepsilon} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_{\Omega} \Phi(x-y)\eta_{\varepsilon}(|x-y|)f(y)dy.$$

Zeige, dass für kompakte Mengen $K \subset \Omega$

$$\sup_{x \in K} |w_{\varepsilon}(x) - u(x)| \rightarrow 0 \text{ für } \varepsilon \rightarrow 0$$

und

$$\sup_{x \in K} |D_i w_{\varepsilon}(x) - v_i(x)| \rightarrow 0 \text{ für } \varepsilon \rightarrow 0$$

gelten.

(ii) Sei $f \in C^1(\overline{\Omega})$. Dann ist u zweimal stetig differenzierbar und eine Lösung der Gleichung $-\Delta u = f$ in Ω .

Aufgabe 12. (4 Punkte) Beweise den Satz von Liouville mit Hilfe der Mittelwerteigenschaft für harmonische Funktionen.

Aufgabe 13. (4 Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^0(\Omega)$. Nehme an, dass für alle $\varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} u(x)\Delta\varphi(x) dx = 0$$

gilt. Zeige, dass u in Ω harmonisch ist.

Anleitung: Zeige, dass

- (i) die Mollifizierungen u_{ε} harmonisch sind (benutze die obige Eigenschaft von u !) und
- (ii) u die Mittelwerteigenschaft erfüllt.