Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak | Universität Konstanz | Wintersemester 2021/2022

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG THEORIE PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 2

Aufgabe 6. (2 Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Seien $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ Lösungen der RWP

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} \Delta v = f & \text{in } \Omega, \\ v = \psi & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Zeige, dass

$$\max_{\overline{\Omega}} |u - v| \le \max_{\partial\Omega} |\varphi - \psi|$$

gilt.

Aufgabe 7. (4 + 2* Punkte) Sei $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ und definiere $u := \Phi * f$, wobei Φ die Fundamentallösung der Laplacegleichung sei. Zeige die folgenden Aussagen:

(i) Sei $n \ge 3$. Dann gilt

$$\sup_{\mathbb{R}^n \setminus B_r(0)} |u| \to 0 \quad \text{für } r \to \infty.$$

(ii)* Sei $n = 2$. Dann gilt

$$\sup_{\mathbb{R}^n \setminus B_r(0)} |u| \to 0 \quad \text{für } r \to \infty$$

genau dann wenn $\int_{\mathbb{R}^2} f = 0$ gilt. Falls $\int_{\mathbb{R}^2} f > 0$ ist und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ eine beliebige Folge mit $|x_n| \to \infty$ für $n \to \infty$ ist, so folgt $|u(x_n)| \to \infty$ für $n \to \infty$.

Hinweis: Zeige, dass für gegebenes $R_0 > 0$ für alle $y \in B_{R_0}(0) \subset \mathbb{R}^2$ und beliebige Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ mit $|x_n| \to \infty$ für $n \to \infty$ auch

$$\big|\log|x_n - y| - \log|x_n|\big| \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

gilt.

(iii) Es gibt eine nur von n und $\operatorname{diam} \operatorname{supp} f$ abhängige Konstante $c > 0$, so dass

$$\|Du\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \le c\|f\|_{C^0(\mathbb{R}^n)}$$

gilt, wo $\operatorname{diam} A := \sup\{|x - y| : (x, y) \in A^2\}$.

Aufgabe 8. (4 Punkte) Lies und verstehe den Anhang B über Integration in Polarkoordinaten.

Aufgabe 9. (4 Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^2(\Omega)$. Gilt für jede Kugel $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$

$$u(x) = \fint_{B_r(x)} u(y)\, dy,$$

so ist u in Ω harmonisch. Zeige dies.

Aufgabe 10. (2 Punkte) Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ mit $u(x, y) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = v(r, \varphi)$. Zeige, dass $v \in C^2((0, \infty) \times \mathbb{R})$ ist und dass

$$\Delta u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\varphi\varphi}$$

gilt.