Aufgabe 5. (2 Punkte für $n = 2$, 4 Punkte für $n \in \mathbb{N}_+$) Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ harmonisch, d.h. es gelte $\Delta u = 0$. Definiere $k(x) := \frac{1}{|x|^{n-2}} u\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Zeige, dass k in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ harmonisch ist.

Lösung.

$$
\begin{aligned}
w(x) &= |x|^{2-n} u\left(x|x|^{-2}\right), \\
w_i(x) &= (2-n)|x|^{-n} x_i u + |x|^{2-n} u_k \left(\delta_i^k |x|^{-2} - 2x^k |x|^{-4} x_i\right) \\
&= (2-n)|x|^{-n} x_i u + |x|^{-n} u_i - 2|x|^{-n-2} u_k x^k x_i, \\
w_{ij}(x) &= (-n)(2-n)|x|^{-n-2} x_i x_j u + (2-n)|x|^{-n} \delta_{ij} u + (2-n)|x|^{-n} x_i u_k \left(\delta_j^k |x|^{-2} - 2x^k |x|^{-4} x_j\right) \\
&\quad - n|x|^{-n-2} x_j u_i + |x|^{-n} u_{ik} \left(\delta_j^k |x|^{-2} - 2x^k |x|^{-4} x_j\right) + 2(n+2)|x|^{-n-4} u_k x^k x_i x_j \\
&\quad - 2|x|^{-n-2} u_{kl} x^k \left(\delta_j^l |x|^{-2} - 2x^l |x|^{-4} x_j\right) x_i - 2|x|^{-n-2} u_k \left(\delta_j^k x_i + x^k \delta_{ij}\right), \\
\Delta w &= 0 + (2-n)|x|^{-n-2} u_k x^k - 2(2-n)|x|^{-n-2} u_k x^k - n|x|^{-n-2} u_k x^k + |x|^{-n-2} \Delta u \\
&\quad - \underline{2|x|^{-n-4} u_{ij} x^i x^j} + 2(n+2)|x|^{-n-2} u_k x^k - \underline{2|x|^{-n-4} u_{ij} x^i x^j} + \underline{4|x|^{-n-4} u_{ij} x^i x^j} \\
&\quad - 2|x|^{-n-2} u_k x^k - 2|x|^{-n-2} n u_k x^k \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

da $2 - n - 4 + 2n - n + 2n + 4 - 2 - 2n = 0$ als Vorfaktor verschwindet. $\square$