Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak Universität Konstanz Wintersemester 2021/2022

Übungen zur Vorlesung Theorie partieller Differentialgleichungen

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 7

Aufgabe 26. (4 Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch, $u \geq 0$ und $\overline{B_R(0)} \subset \Omega$. Beweise die folgende explizite Version der Harnackungleichung für $x \in B_R(0)$:

$$\frac{R^{n-2}(R-|x|)}{(R+|x|)^{n-1}}u(0) \leq u(x) \leq \frac{R^{n-2}(R+|x|)}{(R-|x|)^{n-1}}u(0).$$

Beweise damit erneut den Satz von Liouville.

Aufgabe 27. (Fundamentallösung der 1-dimensionalen Wärmeleitungsgleichung, 4 Punkte) Sei $n = 1$ und sei u von der Form $u(x,t) = v(x^2/t)$. Zeige, dass

(i) $u_t = u_{xx}$ genau dann gilt, wenn v

$$4zv''(z) + (2+z)v'(z) = 0\,, \quad \forall z > 0\,, \tag{$\star$}$$

erfüllt.

(ii) die allgemeine Lösung der Gleichung ($\star$) die Gestalt

$$v(z) = c\int_0^z e^{-s/4}s^{-1/2}\,ds + d$$

hat.

(iii) Leite daraus die Fundamentallösung Φ der Wärmeleitungsgleichung für $n = 1$ her.

Aufgabe 28. (Gleichverteilung der Energie, 4 Punkte) Sei $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty)\,, \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R} \times \{0\}\,, \end{cases}$$

wobei $\operatorname{supp} g, \operatorname{supp} h$ kompakt sind. Definiere die *kinetische Energie* $k(t) := \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_t^2(x,t)\,dx$ und die *potentielle Energie* $p(t) := \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(x,t)\,dx$. Zeige, dass

(i) $k(t) + p(t)$ konstant ist.

(ii) $k(t) = p(t)$ für t groß genug.

Aufgabe 29. (Endlich Ausbreitungsgeschwindigkeit für hyperbolische Gleichungen, 4 Punkte) Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (-\infty,\infty))$ eine Lösung der Gleichung

$$u_{tt} = a^{ij}u_{ij} + b^i u_i + du \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (-\infty,\infty)\,,$$

wobei die Koeffizienten a^{ij}, b^i und d samt ihren ersten Ableitungen bezüglich x und t gleichmäßig beschränkt sind. Weiterhin sei $\left(a^{ij}\right)_{i,j}$ symmetrisch und gleichmäßig elliptisch, d. h. es gibt ein $\lambda > 0$ mit

$$a^{ij}\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2 \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Zeige: Gilt $u \equiv u_t \equiv 0$ in $B_R(0) \times \{0\}$ für ein $R > 0$, so folgt $u = 0$ in der Menge

$$C := \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \colon |x| < R - \beta t\right\}$$

für ein geeignet gewähltes $\beta > 0$.

Hinweis: Betrachte $e(t) := \frac{1}{2}\int_{B_{R-\beta t}(0)} e^{-\mu t}(u_t^2 + a^{ij}u_iu_j + \kappa u^2)\,dx$ für geeignete $\mu, \kappa, \beta > 0$.