Fachbereich Mathematik und Statistik — Universität Konstanz
Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak — Wintersemester 2021/22

Übungen zur Vorlesung Geometrische ODEs

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 2

Aufgabe 2.1. Eine Immersion $X\colon \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ heißt konform, wenn die induzierte Metrik die Form $g_{ij}(x) = \lambda(x)\,\delta_{ij}$ hat.
Stelle eine Differentialgleichung für $z(r)$ auf, die genau dann erfüllt ist, wenn die Immersion $X\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$X(x,y) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + z(r)^2}}\,(x, y, z(r)) \quad \text{mit } r = \sqrt{x^2+y^2}$$

konform ist. Löse die Differentialgleichung durch einen Polynomansatz und stelle so eine konforme Einbettung der Sphäre auf.
Zusatz: Ist $z(r)$ eindeutig bestimmt? Was ist ein geometrischer Grund dafür?

Aufgabe 2.2. Betrachte die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = \sin(t) + x^2(t).$$

Zeige, dass es genau einen Anfangswert $x(0) = x_0$ gibt, so dass die zugehörige Lösung $x(1) = 1$ erfüllt.

Abgabe: Dienstag, 09.11.2021, 13:30 Uhr, in der Vorlesung.

Aufgabe 2.3. Sei $\Phi \in C^2((0,\infty))$ und es existieren die Grenzwerte $\lim\limits_{r\to 0} \Phi(r)$ und $\lim\limits_{r\to\infty} \Phi(r)$. Wir definieren $U(x,y) := \Phi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \equiv \Phi(r)$ für $(x,y) \neq (0,0)$. Die Umkehrung der stereographischen Projektion ist eine Einbettung von $\mathbb{R}^2$ auf die Sphäre $\mathbb{S}^2$ ohne den Nordpol:

$$X(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}\left(2x, 2y, x^2+y^2-1\right).$$

Über diese Einbettung lässt sich $U\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ zu einer Funktion $\tilde{U}\colon \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,\pm 1)\} \to \mathbb{R}$ machen. Genauer gilt $U(x,y) = \tilde{U}(X(x,y))$. Aus den Stetigkeitsbedingungen von Φ an den Intervallgrenzen wird klar, dass sich $\tilde{U}$ zu einer stetigen Funktion $\bar{U}\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ fortsetzen lässt.
Gib Bedingungen an Φ an, die äquivalent zu $\bar{U} \in C^2(\mathbb{S}^2)$ sind und zeige diese Äquivalenz.
Erinnerung: Differenzierbarkeit auf einer Untermannigfaltigkeit ist über Karten definiert.