Fachbereich Mathematik und Statistik — Universität Konstanz
Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak — Wintersemester 2021/22

Übungen zur Vorlesung Geometrische ODEs

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 1

Aufgabe 1.1. Erfüllen $x, y \colon [0, T] \to \mathbb{R}$ die Differentialungleichungen

$$\dot{x}(t) \geq f(t, x(t)) \qquad \text{bzw.} \qquad \dot{y}(t) \leq f(t, y(t))$$

für $t \in [0, T]$ mit einer stetigen Funktion $f \colon [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die im zweiten Argument lokal Lipschitz-stetig ist. Es gelte $x(0) \geq y(0)$.
Zeige, dass dann auch $x(t) \geq y(t)$ für alle $t \in [0, T]$ gilt.
Hinweis: Die folgenden Ansätze führen zu unterschiedlichen Lösungen:

(i) Vergleiche $\tilde{y}(t) := y(t) - \delta - \varepsilon\, t$ mit $x(t)$.
(ii) Wende das Lemma von Gronwall auf $y - x$ in einem Intervall an, in dem diese Funktion nichtnegativ ist.

Aufgabe 1.2. Wir untersuchen das Verhalten von Sphären unter Krümmungsflüssen.

(i) Stelle eine Differentialgleichung für den Radius $r(t) > 0$ auf, so dass die Sphären $\mathbb{S}^n_{r(t)}$ den Krümmungsfluss
   (a) $\dot{X} = -H\,\nu$ (mittlerer Krümmungsfluss),
   (b) $\dot{X} = -K\,\nu$ (Gaußkrümmungsfluss) oder
   (c) $\dot{X} = \frac{1}{H}\,\nu$ (inverser mittlerer Krümmungsfluss)

   erfüllen. Löse die Differentialgleichungen.
(ii) Sei $T \in \mathbb{R}$. Für den mittleren Krümmungsfluss reskalieren wir für $t < T$, indem wir die Sphären mit $\lambda(t) = (T - t)^{-1/2}$ multiplizieren und die neue Zeitvariable $s = -\frac{1}{2}\log(T - t)$ einführen.
   - Stelle eine Differentialgleichung für die reskalierten Radien

     $$\tilde{r}(s) := \lambda(t(s))r(t(s)) > 0$$

     auf.
   - Zeige, dass diese genau einen stationären Punkt hat.
   - Zeige, dass dieser stationäre Punkt instabil ist.

Abgabe: Dienstag, 02.11.2021, 13:30 Uhr, in der Vorlesung.