Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak ☃ Universität Konstanz ☃ Wintersemester 2022

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen II

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 9

Abgabe: Bis Montag, 9. Januar 2023, 10:00 Uhr bei F402

Aufgabe 9.1 (*2 Punkte*)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Finde monoton wachsende Folgen $a_i \leqslant b_i$ mit $a_i, b_i \to \infty$ für $i \to \infty$ und

$$a_i \leqslant \lambda_i(\Omega) \leqslant b_i.$$

Aufgabe 9.2 (*2 Punkte*)

Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ beschränkte Gebiete. Wir nehmen an, es gilt $U \subset V$. Was lässt sich daraus über die zugehörigen Eigenwerte der Laplaceoperatoren $\lambda_i(U)$ und $\lambda_i(V)$ folgern?

Aufgabe 9.3 (*Rotationssymmetrische Eigenfunktionen*) (*4 Punkte*)

(i) Bestimme die gewöhnliche Differentialgleichung, die zu rotationssymmetrischen Eigenfunktionen des Laplaceoperators auf $\mathbb{R}^n$ gehört.

(ii) Welche Beziehung besteht zwischen Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten?

(iii) Löse die Differentialgleichung (numerisch) und zeichne das Ergebnis.

(iv) Wie erhält man hieraus rotationssymmetrische Eigenfunktionen des Laplaceoperators auf $B_r(0) \subset \mathbb{R}^n$?

Aufgabe 9.4 (*Eigenfunktionen des Quadrats*) (*4 Punkte*)

Eine L^2-Basis aus Eigenfunktionen des Laplaceoperators auf $(0, \pi)$ ist durch

$$(\sin(ix))_{i\in\mathbb{N}}$$

gegeben. Zeige, dass Funktionen der Form

$$u_{ij}(x, y) := \sin(ix) \cdot \sin(jy)$$

eine L^2-Basis aus Eigenfunktionen des Laplaceoperators auf $(0, \pi)^2$ bilden. Bestimme die zugehörgien Eigenwerte.

Hinweis: Skizziere, warum charakteristische Funktionen von (kleinen) Quadraten einen dichten Teilraum von $L^2\left((0, \pi)^2\right)$ erzeugen.

Aufgabe 9.5 (*Stetige Abhängigkeit vom Gebiet*) (*4 Punkte*)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und glatt. Sei $\Phi_t \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Familie von glatten Diffeomorphismen mit $\Phi_0 = \mathrm{Id}$. Definiere $\Omega_t := \Phi_t(\Omega)$. Wir möchten zeigen, dass die Eigenwerte des Laplaceoperators auf den Gebieten Ω_t stetig von t abhängen.

(i) Sei $u \in H^1_0(\Omega_t)$. Schreibe

$$\frac{\langle Du, Du\rangle_{L^2(\Omega_t)}}{\langle u, u\rangle_{L^2(\Omega_t)}}$$

als t-abhängiges Funktional für $u \circ \Phi_t \in H^1_0(\Omega)$ um.

(ii) Zeige damit, dass $\lambda_1(\Omega_t)$ stetig von t abhängt.

(iii) Benutze eine min-max-Charakterisierung von Eigenwerten wie in Aufgabe 8.4 um zu zeigen, dass jeder Eigenwert $\lambda_i(\Omega_t)$, $i \in \mathbb{N}$, stetig von t abhängt.