Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak
Universität Konstanz
Wintersemester 2022

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN II

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 8

Abgabe: Bis Montag, 19. Dezember 2022, 10:00 Uhr bei F402

Aufgabe 8.1 (*4 Punkte*)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit $\partial\Omega \in C^{k,\alpha}$. Sei $\Omega' \Supset \Omega$ und $g \in C^{k,\alpha}(\Omega)$. Zeige, dass es eine Fortsetzung $\tilde{g} \in C^{k,\alpha}_c(\Omega')$ von g mit

$$\|\tilde{g}\|_{C^{k,\alpha}(\Omega')} \leqslant c(n, \Omega, \Omega')\|g\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)}$$

gibt.

Hinweis: Betrachte eine Spiegelung höherer Ordnung.

Aufgabe 8.2 (*4 Punkte*)

Seien Ω, Ω' offen und beschkränkt mit $\Omega \Subset \Omega'$. Sei $g \in C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$. Zeige, dass es eine Fortsetzung $\tilde{g} \in C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ von g mit $\operatorname{supp} \tilde{g} \Subset \Omega'$ und

$$\|\tilde{g}\|_{C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c(n, \Omega, \Omega')\|g\|_{C^{k,\alpha}(\partial\Omega)}$$

gibt.

Hinweis: Auf $C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$ betrachten wir die folgende Norm: Ist (U_i, φ_i) eine endliche Kollektion von Karten $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ mit $\cup_i U_i \supset \partial\Omega$ und $\|\varphi_i\|_{C^{2,\alpha}(U_i)} \leqslant c$, so defieneren wir

$$\|g\|_{C^{2,\alpha}(\partial\Omega)} := \sum_i \left\|g \circ \varphi_i^{-1}(\,\cdot\,, 0_{\mathbb{R}})\right\|_{C^{2,\alpha}(V_i)},$$

wobei $V_i = \pi(\varphi(U_i) \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}))$ und $\pi : (\hat{x}, x^n) \mapsto \hat{x}$ die Projektion auf $\mathbb{R}^{n-1}$ ist.

Aufgabe 8.3 (*4 Punkte*)

Sei H ein reeller Hilbertraum und $\{0\} \neq V \subset H$ ein abgeschlossener Unterraum. Seien K, B symmetrische, stetige Bilinearformen auf H. Wir nehmen an, die zu K gehörige quadratische Form $K(u) := K(u, u)$ sei schwach folgenstetig, d. h. falls $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ schwach in H gegen $u \in H$ konvergiert, dann konvergiert $K(u_n)$ gegen $K(u)$. Außerdem sei K positiv, d. h. für alle $u \neq 0$ gilt $K(u) > 0$. B sei koerziv relativ zu K, d. h. es gibt Konstanten $c_0, c > 0$, so dass für alle $u \in H$

$$B(u) := B(u, u) \geq c\|u\|^2 - c_0 K(u)$$

gilt. Zeige, dass das es ein $v_0 \in V$ gibt, so dass für alle $0 \neq v \in V$

$$\lambda_0 := \frac{B(v_0)}{K(v_0)} \leq \frac{B(v)}{K(v)}$$

gilt. Zeige weiterhin, dass für alle $v \in V$

$$B(v_0, v) = \lambda_0 K(v_0, v)$$

gilt.

b.w.

Aufgabe 8.4 *(4 Punkte)*

Sei H ein reeller Hilbertraum mit $\dim(H) = \infty$. Seien K, B symmetrische, stetige Bilinearformen auf H. Sei K positiv und schwach folgenstetig und sei B koerziv relativ zu K. Induktiv definieren wir nun für $i \in \mathbb{N}_{>0}$ die Paare (λ_i, u_i) durch

$$\lambda_i := \frac{B(u_i)}{K(u_i)} = \min\left\{\frac{B(u)}{K(u)} : 0 \neq u \in H, K(u, u_j) = 0 \text{ für alle } 1 \leq j \leq i-1\right\},$$

wobei $K(u_i, u_j) = \delta_{ij}$ für $1 \leq j \leq i$ gelte.
Ist $V \subset H$ ein Unterraum, so definieren wir die Kodimension von V durch

$$\operatorname{codim}(V) := \dim(H/V).$$

Wir setzen

$$U_i := \{V \subset H \colon V \text{ ist ein abgeschlossener Unterraum, } \operatorname{codim}(V) < i\}.$$

Zeige, dass für $i \in \mathbb{N}_{>0}$

$$\lambda_i = \max_{V \in U_i} \min_{0 \neq u \in V} \frac{B(u)}{K(u)}$$

gilt und dass das Maximum in

$$V_i := \left\{x \in H \colon K(x, u_j) = 0 \text{ für alle } 1 \leq j \leq i-1\right\}$$

angenommen wird.