Oliver Schnürer, Universität Konstanz Wintersemester 2022
Gaspard Jankowiak

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen II

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 7

Abgabe: Bis Montag, 12. Dezember 2022, 10:00 Uhr bei F402

Aufgabe 7.1 (*4 Punkte*)

Formuliere und beweise eine elliptische Entsprechung der inneren a priori Abschätzungen für Lösungen der Wärmeleitungsgleichung (Theorem 3.4).

Hinweis: Es darf auch die allgemeinere Version mit $Lu = a^{ij}u_{ij} + b^i u_i + du$ betrachtet werden

Aufgabe 7.2 (*4 Punkte*)

Seien $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $u \in C^{2,\alpha}$ mit $\alpha \in (0,1)$ eine Lösung von

$$e^u \Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n\,.$$

Zeige, dass $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Aufgabe 7.3 (*Nichtkompakte Stabilität - Fortsetzung*) (*8 Punkte*)

Sei $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)) \cap C^0(\mathbb{R}^n \times [0,\infty)) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit im Unendlichen abfallenden Anfangswerten $u_0 \in C^0(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{cases} \dot u = \Delta u & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty)\,, \\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{in } \mathbb{R}^n\,, \end{cases}$$

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{\mathbb{R}^n \setminus B_r(0)} |u_0| = 0\,.$$

(iii) Seien $\varepsilon > 0$ und $p = 1$ oder $p \geqslant 2$. Betrachte

$$I_\varepsilon(t) = \int_{\mathbb{R}^n} (u(\cdot,t) - \varepsilon)_+^p$$

und zeige, dass $\frac{d}{dt} I_\varepsilon(t) \leqslant 0$ gilt.

Hinweis: Betrachte die Fälle $p = 1$ und $p \geqslant 2$ separat. Nutze den Satz von Sard (DG III), um die partielle Integration klassisch zu rechtfertigen. Argumentiere alternativ in Sobolevräumen.

(iv) Zeige, dass es ein $t_0 > 0$ gibt, so dass es keinen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $u(x_0,t) \geqslant 3\varepsilon$ für $t \geqslant t_0$ geben kann.

Hinweis: Nutze (ii) und Abschätzungen aus Kapitel 3.