Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak Universität Konstanz Wintersemester 2022

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen II

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 6

Abgabe: Bis Montag, 5. Dezember 2022, 10:00 Uhr bei F402

Aufgabe 6.1 (*$C^{2,\alpha}$-Abschätzungen am Rand*) (*6 Punkte*)

Beweise Theorem 2.14

Aufgabe 6.2 (*4 Punkte*)

Betrachte die Transformationen aus dem Beweis von Theorem 2.21 in Detail.

Aufgabe 6.3 (*Nichtkompakte Stabilität*) (*6 Punkte*)

Wir behandeln folgendes

Theorem . *Sei $u_0 \in C^0(\mathbb{R}^n)$ eine Funktion, die im Unendlichen abfällt; gelte also*

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{\mathbb{R}^n\setminus B_r(0)} |u_0| = 0\,.$$

Betrachte die durch Faltung mit der Fundamentallösung gegebene beschränkte (und somit eindeutige) Lösung $u \in C^0(\mathbb{R}^n \times [0,\infty)) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ von

$$\begin{cases} \dot u = \Delta u & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty)\,, \\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{in } \mathbb{R}^n\,. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\mathbb{R}^n} |u(\cdot,t)| = 0\,.$$

(i) Nutze die Darstellung der Lösung als Faltung um das Theorem zu zeigen.

Nun wollen wir einen Beweis betrachten, der teilweise unabhängig von der Darstellungsformel ist.

(ii) Sei u_0 wie oben. Seien a^{ij}, b^i, $d : \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ beschränkt, wobei a^{ij} gleichmäßig elliptisch ist und sei $u \in C^0(\mathbb{R}^n \times [0,\infty)) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ eine beschränkte Lösung von

$$\begin{cases} \dot u = a^{ij}u_{ij} + b^i u_i + du & \text{in } \mathbb{R}^n \times [0,\infty)\,, \\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{in } \mathbb{R}^n\,. \end{cases}$$

Zeige, dass $u(\cdot,t)$ für jedes $t \geqslant 0$ im Unendlichen abfällt:

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{\mathbb{R}^n\setminus B_r(0)} |u(\cdot,t)| = 0\,.$$

Hinweis: Betrachte zunächst $d \equiv 0$. Konstruiere eine Barriere g, die $\dot g \geqslant a^{ij}g_{ij} + b^i g_i$ erfüllt und sicherstellt, dass u weit entfernt vom Ursprung lange nahe 0 bleibt.

Hinweis: Diese Aufgabe wird fortgeführt.