Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak | Universität Konstanz | Wintersemester 2022

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen III

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 4

Abgabe: Bis Montag, 21. November 2022, 10:00 Uhr bei F402

Aufgabe 4.1 (*8 Punkte*)

Für $1 \le i, j \le n$ seien a^{ij} (symmetrisch), b^i und f glatte Funktionen auf $\mathbb{R}^n \times [0, T]$, die mitsamt ihren Ableitungen beschränkt sind. Es gelte für ein $\theta > 0$

$$a^{ij}(x,t)\ \xi_i\ \xi_j \ge \theta\ |\xi|^2 \quad \text{für alle } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T] \text{ und alle } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Sei $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ eine beschränkte Lösung der parabolischen Gleichung

$$\dot{u} - \left(a^{ij}\ u_{ij} + b^i\ u_i\right) = f.$$

Zeige, dass es eine Konstante $C > 0$ gibt, die nur von $\|u\|_{L^\infty}$, $\|a^{ij}\|_{C^2}$, θ, $\|b^i\|_{C^1}$, $\|f\|_{C^1}$, T und n abhängt, so dass

$$|Du|^2(x_0, t_0) \le \frac{C}{t_0}$$

für alle $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0, T]$ gilt.
Hinweis: Wähle $w = t\ \phi^2(x)\ a^{kl} u_k u_l + \lambda u^2 + e^{\mu(T-t)}$ für $\lambda, \mu > 1$ und eine Abschneidefunktion ϕ und betrachte $Lw := \dot{w} - \left(a^{ij}\ w_{ij} + b^i\ w_i\right)$.

Aufgabe 4.2 (*4 Punkte*)

Sei $T > 0$. Sei $u\colon \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, so dass u, Du, D^2u, D^3u, $\dot{u}$ und $\ddot{u}$ gleichmäßig beschränkt sind. Seien a^{ij} gleichmäßig elliptisch und beschränkt und b^i beschränkt. Weiter erfülle u die Differentialungleichung

$$\dot{u}(x,t) - a^{ij}(x,t)\ u_{ij}(x,t) + b^i(x,t)\ u_i(x,t) \le 0$$

für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T]$.
Zeige, dass

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} u = \sup_{\mathbb{R}^n} u(\cdot, 0)$$

gilt.

Anleitung:

Betrachte $w := u - \varepsilon t$ und eine Folge (x_k, t_k) mit

$$w(x_k, t_k) \to \sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} w\,.$$

Nehme dabei

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} w > \sup_{\mathbb{R}^n} w(\cdot, 0)$$

an. Erzeuge dann einen Widerspruch, nachdem du $|Dw(x_k, t_k)| < \delta_k$, $D^2 w(x_k, t_k) < \delta_k\, I_n$ und $\dot{w}(x_k, t_k) > -\delta_k$ zeigst, wobei $\delta_k \to 0$ gilt.

Aufgabe 4.3 *(2 Punkte)*

Sei $T > 0$, $I := (0,T)$, und sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $u \in C^{4;2}(\Omega \times I) \cap C^0\left(\overline{\Omega} \times \overline{I}\right)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\dot{u} = \Delta u \quad \text{in } \Omega \times I.$$

Sei $\Omega' \Subset \Omega$ offen mit $\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega) > \varepsilon > 0$. Zeige, dass es eine Konstante $c_0 = c_0(n) > 0$ gibt, so dass

$$\|Du\|_{L^\infty(\Omega' \times (\varepsilon^2, T))} \leq \frac{c_0}{\varepsilon} \|u\|_{L^\infty(\Omega \times I)}$$

gilt.