Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak Universität Konstanz Wintersemester 2022

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen III

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 3

Abgabe: Bis Montag, 14. November 2022, 10:00 Uhr bei F402

Aufgabe 3.1 (*4 Punkte*)

Seien $\Omega, \widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $\psi : \Omega \to \widetilde{\Omega}$ ein C^1-Diffeomorphismus mit $\|\psi\|_{C^1(\Omega)}, \|\psi^{-1}\|_{C^1(\widetilde{\Omega})} < \infty$. Sei $1 \le p < \infty$. Wir definieren die Abbildung

$$\varphi : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\widetilde{\Omega}),\ u \mapsto \widetilde{u} := u \circ \psi^{-1}.$$

Zeige, dass φ ein wohldefinierter topologischer Isomorphismus ist.

Aufgabe 3.2 (*6 Punkte*)

Sei $\Omega = B_1(0) \cap \mathbb{R}^n_+ \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1, x^n > 0\}$. Seien $a^{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $b^i, d \in L^\infty(\Omega)$ und $f \in L^2(\Omega)$. Sei (a^{ij}) gleichmäßig elliptisch mit Elliptizitätskonstante $\theta > 0$. Sei $u \in H^1_0(\Omega)$ eine schwache Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} Lu := -\left(a^{ij}u_i\right)_j + b^i u_i + du = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Beweise, dass u die folgenden schwachen partiellen Ableitungen besitzt und diese

$$\sum_{\substack{k,l \\ k+l<2n}} \|u_{kl}\|_{L^2\left(B_{1/2}(0)\cap\mathbb{R}^n_+\right)} \le c \cdot \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\right)$$

erfüllen.

Aufgabe 3.3 (*6 Punkte*)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Für $1 \le i \le n$ sei $a^i \in C^1(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $b \in C^0(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ und sei $f \in L^2(\Omega)$. Wir nehmen an, dass es Konstanten $c_A, \theta > 0$ gibt, so dass für alle $(x, z, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ und $i, j \in \{1, \dots, n\}$ die Ungleichungen

$$|b(x,z,p)| + \left|\frac{\partial a^i}{\partial x}(x,z,p)\right| \le c_A(1 + |z| + |p|), \tag{2}$$

$$\left|\frac{\partial a^i}{\partial z}(x,z,p)\right| + \left|\frac{\partial a^i}{\partial p_j}(x,z,p)\right| \le c_A \tag{3}$$

und

$$\frac{\partial a^i}{\partial p_j}\xi_i\xi_j \ge \theta|\xi|^2 \tag{4}$$

gelten. Sei $u \in H^1(\Omega)$ eine schwache Lösung der Gleichung

$$-\left(a^i(x,u,Du)\right)_i + b(x,u,Du) = f.$$

Das heißt, es gilt für alle $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int\limits_\Omega a^i(\cdot, u, Du)\, v_i + b(\cdot, u, Du) v = \int\limits_\Omega f\, v.$$

Zeige, dass dann auch $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ gilt und für alle $\Omega' \Subset \Omega$ eine Konstante $c = c(c_A, \theta, \Omega, \Omega')$ existiert, so dass

$$\|u\|_{H^2(\Omega')} \le c \left(1 + \|u\|_{H^1(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

gilt.
Hinweis: Verwende den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in der Form

$$D_k^h a^i(x, u(x), Du(x)) = \frac{1}{h} \int\limits_0^1 \frac{d}{dt} \left(a^i(x_t, u_t, Du_t)\right) \mathrm{d}t.$$

Dabei setzen wir

$$\begin{aligned} x_t &:= t\,(x + he_k) + (1-t)\,x, \\ u_t &:= t\, u(x + he_k) + (1-t)\, u(x), \\ Du_t &:= t\, Du(x + he_k) + (1-t)\, Du(x). \end{aligned}$$

Aufgabe 3.4 (*Zusatz*) (*4 Punkte*)

Es gelten die Voraussetzungen von Aufgabe 3.3. Zusätzlich sei der Rand $\partial\Omega$ von der Klasse C^2 und eine Funktion $\varphi \in H^2(\Omega)$ gegeben.

Sei $u \in H^1(\Omega)$ eine schwache Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} -(a^i(x, u, Du))_i + b(x, u, Du) = f & \text{in } \Omega, \\ -a^i(x, u, Du)\nu_i = \varphi & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Das heißt, es gilt für alle $v \in H^1(\Omega)$

$$\int\limits_\Omega a^i(\cdot, u, Du) v_i + b(\cdot, u, Du) v = \int\limits_\Omega f v - \int\limits_{\partial\Omega} \varphi v.$$

Dann ist $u \in H^2(\Omega)$ und es gilt

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \le c = c\left(n, \Omega, \theta, c_A, \|u\|_{H^1(\Omega)}, \|f\|_{L^2(\Omega)}, \|\varphi\|_{H^2(\Omega)}\right).$$