Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak | Universität Konstanz | Wintersemester 2022

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN III

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 2

Abgabe: Bis Montag, 07. November 2022, 10:00 Uhr bei F402

Aufgabe 2.1 (*4 Punkte*)

Lies und verstehe Anhang C zu Differenzenquotienten und $W^{1,p}$-Funktionen aus dem Vorlesungskript.

Aufgabe 2.2 (*Verallgemeinerte Cauchy-Schwarz-Ungleichung für Tensoren*) (*8 Punkte*)

Sei S ein $(1,2)$-Tensor und T ein $(2,1)$-Tensor. Dann gilt die Ungleichung

$$S^a_{ij} T^{ij}_a \le \|S\| \cdot \|T\| \,,$$

mit $\|S\|^2 = S^a_{ij} \cdot S^b_{kl} \cdot g_{ab} \cdot g^{ik} \cdot g^{jl}$

(i) im Fall $g_{ij} = \delta_{ij}$.

(ii) im allgemeinen Fall, *i.e.* g_{ij} positiv definit.

Aufgabe 2.3 (*4 Punkte*)

Sei Ω offen und beschränkt mit glattem Rand. Seien $f, g \in L^2(\Omega)$. Betrachte

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \,, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{auf } \partial\Omega \,, \end{cases} \tag{1}$$

wobei ν der (nach außen weisende) Normaleneinheitsvektor ist und $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu$ gilt.

(i) Gib ein Funktional $\Phi\colon H^2 \to \mathbb{R}$ an, dessen Euler-Lagrange-Gleichung, d h. die Gleichung, die in einem kritischen Punkt gelten muss, gerade (1) ist. Zeige, dass kritische Punkte von Φ nicht eindeutig bestimmt sind. Wir sagen, dass

$$\min_{u \in H^2} \Phi(u)$$

das zu (1) gehörige Variationsproblem ist.

(ii) Sei $V = \{u \in H^2 : \int_\Omega u(x)\,\mathrm{d}x = 0\}$. Zeige mit der Poincaré-Ungleichung, dass das auf V gestellte Variationsproblem einen eindeutig bestimmten kritischen Punkt besitzt.

(iii) Gib eine Bedingung an f und g an, die sicherstellt, dass ein kritischer Punkt des Variationsproblems das Randwertproblem (1) löst.

Hinweis: Betrachte zunächst Variationen mit kompaktem Träger und nutze das Ergebnis in einem zweiten Schritt.

Bemerkung: Hier betrachten wir u in H^2, um die Spur von ∇u auf $\partial\Omega$ einfach definieren zu können. Diese kann aber auch für $u \in H^1$ in diesem Fall (und mit mehr technischem Aufwand) definiert werden.