Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak | Universität Konstanz | Wintersemester 2022

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen II

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 13

Abgabe: Bis Montag, 06. Januar 2023, 10:00 Uhr bei F402

Aufgabe 13.1 (*12 Punkte*)

Sei Ω offen, beschränkt mit $\partial\Omega$ glatt. Der erste Neumann-Eigenwert des Laplaceoperators ist gegeben durch

$$\mu_0 := \inf_{0\neq u\in H^1(\Omega)} \frac{\int_\Omega |Du|^2}{\int_\Omega u^2}\,.$$

(i) Bestimme μ_0 und die entsprechenden Eigenfunktionen u_0. Was ist die Multiplizität von μ_0?

Sei $k \geqslant 0$. Wir nehmen an, dass $\mu_i \in \mathbb{R}$, $u_i \in H^1(\Omega)$ für $i < k$ schon bestimmt sind, wobei u_i eine schwache Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta u + \mu_i u = 0 \tag{1}$$

ist und u_i die Randbedingung $\frac{\partial u_i}{\partial \nu} = 0$ erfüllt. Wir definieren $H_k = \left\{u \in H^1(\Omega) : \langle u, u_i\rangle = 0\,, i < k\right\}$. Betrachte nun das Variationsproblem

$$\mu_k := \inf_{0\neq u\in H_k} \frac{\int_\Omega |Du|^2}{\int_\Omega u^2}\,. \tag{2}$$

(ii) Zeige, dass das Infimum für eine Funktion u_k mit $\|u_k\|_{L^2(\Omega)} = 1$ angenommen wird.

(iii) Zeige, dass u_k eine schwache Lösung der DGL (1) ist.

(iv) Was kannst Du über die Regularität von u_k aussagen? Reicht dies, um $\frac{\partial u_k}{\partial \nu}$ zu definieren?

Wir nehmen jetzt an, dass $u_k \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

(i) Zeige, dass $\mu_i \xrightarrow{i\to\infty} \infty$ gilt.

(ii) Sei $u \in H^1(\Omega)$. Zeige, dass

$$u = \sum_i \langle u, u_i\rangle u_i \quad \text{und} \quad \langle Du, Du\rangle = \sum_i \mu_i \langle u, u_i\rangle^2$$

gelten.

Aufgabe 13.2 (*4 Punkte*)

Wir bezeichnen die Dirichlet-Eigenwerte des Laplaceoperators mit λ_k und die Neumann-Eigenwerte mit μ_k. Zeige, dass es für $k \in \mathbb{N}$

$$\mu_k \leqslant \lambda_k$$

gilt. *Hinweis:* Benutze eine Characterisierung der Form (2).