Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak Universität Konstanz Wintersemester 2022

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen II

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 12

Abgabe: Bis Montag, 30. Januar 2023, 10:00 Uhr bei F402

Aufgabe 12.1 (*Fortsetzung vom Blatt 10 und Aufgabe 11.1*) (*8 Punkte*)

(ix) Zeige, dass jede Lösung auf $\Omega \times [0, \infty)$ für $t \to \infty$ in C^0 gegen eine translatierende Lösung konvergiert.

(x) Zeige, dass sogar Konvergenz in C^k, $k \in \mathbb{N}$, gilt.

(xi) Zeige die Behauptung über exponentielle Konvergenz.

Aufgabe 12.2 (*4 Punkte*)

Zeige, dass die Funktion $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty)) \cap C^0_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ mit

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \frac{d^k}{dt^k} \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right)$$

eine nichttriviale Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit $u(\cdot, 0) = 0$ ist.

Aufgabe 12.3 (*4 Punkte*)

Zeige, dass es eine Funktion $u \in L^1(\mathbb{R})$ gibt, so dass

- $\|\Delta^h u\|_{L^1(\mathbb{R})} \leqslant 2$ für alle $h \in (0, 1)$ gilt, wobei $\Delta^h u$ einen Differenzenquotienten bezeichnet, und
- $u \notin W^{1,1}(\mathbb{R})$ ist.