Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak Universität Konstanz Wintersemester 2022

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen II

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 11

Abgabe: Bis Montag, 24. Januar 2023, 10:00 Uhr bei F402

Aufgabe 11.1 (*Fortsetzung vom Blatt 10*) (*12 Punkte*)

(v) Zeige die Existenz einer in t „diskret translatierenden" Lösung, d. h. zu $t_1 > 0$ gibt es eine Lösung u der Differentialgleichung, so dass ein $v_1 \in \mathbb{R}$ mit
$$u(x, t + t_1) = u(x, t) + t_1 v_1$$
für alle $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$ existiert.

(vi) Angenommen, eine Lösung ist diskret translatierend mit (t_1, v_1) und (t_2, v_2). Zeige, dass dann $v_1 = v_2$ gilt.

(vii) Zeige, dass es eine translatierende Lösung gibt.

(viii) Zeige, dass eine translatierende Lösung — bis auf additive Konstanten — eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 11.2 (*4 Punkte*)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $T > 0$. Sei L ein Differentialoperator der Form
$$Lu(x) = a^{ij}(x)u_{ij}(x) + b^i(x)u_i(x) + d(x)u(x),$$
wobei

(i) a^{ij} symmetrisch ist,

(ii) L gleichmäßig elliptisch ist,

(iii) die Koeffizienten gleichmäßig beschränkt sind, d. h. es gibt $K > 0$, so dass
$$|a^{ij}(x)|,\ |b^i(x)|,\ |d(x)| \le K$$
für alle i, j und alle $x \in \Omega$ gilt.

Erfülle
$$u \in C^2(\Omega \times (0, T)) \cap C^0((\Omega \times (0, T)) \cup \mathcal{P}(\Omega \times (0, T)))$$
die Differentialungleichung
$$\dot{u} - Lu \le f(t) \qquad \text{in } \Omega \times (0, T)$$
für eine Funktion $f = F'$ mit $F \in C^1([0, T])$. Gelte $\sup\limits_{\mathcal{P}(\Omega\times(0,T))} u \le M$ für eine Konstante $M \ge 0$.

Gib eine obere Schranke für $u \in \Omega \times (0, T)$ an.