Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak ☃ Universität Konstanz ☃ Wintersemester 2022

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen II

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 10

Abgabe: Bis Montag, 16. Januar 2023, 10:00 Uhr bei F402

Aufgabe 10.1 (*Konvergenz gegen translatierende Lösungen*) (*16 Punkte*)

Wir betrachten das folgende Theorem:

Theorem . *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, zusammenhängend und gelte $\partial\Omega \in C^\infty$. Sei $F : (r, p, x) \to F(r, p, x)$ der Klasse $C^\infty\left(\mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^n \times \overline{\Omega}\right)$. Sei $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega} \times [0,\infty)\right)$ eine Lösung der gleichmäßig parabolischen Differentialgleichung*

$$\dot{u}(x,t) = F\left(D^2u(x,t), Du(x,t), x\right) \quad \text{für } (x,t) \in \Omega \times [0,\infty)\,,$$

wobei gleichmäßige Parabolizität $\frac{\partial F}{\partial r_{ij}} \geqslant \vartheta\delta_{ij}$ für ein $\vartheta > 0$ bedeutet. Gelte

$$\langle Du, \nu\rangle = \varphi(x) \quad \text{auf } \partial\Omega \times [0,\infty)$$

für ein $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Wir nehmen die folgenden a priori Schranken an: Es gelten $|u(x,t)| \leqslant c \cdot (1+t)$ und

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial t^k} D^\alpha u\right| \leqslant c(k,\alpha) \quad \text{für alle } k \geqslant 0,\ \alpha \text{ mit } k + |\alpha| > 0.$$

Dann gibt es eine glatte translatierende Lösung, d. h. eine Funktion $U\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass $U \in C^\infty$ ist,

$$V = \dot{U}(x,t) = F\left(D^2U(x,t), DU(x,t), x\right) \quad \text{in } \Omega \times \mathbb{R}$$

sowie $\langle DU(x,t), \nu\rangle = \varphi(x)$ für $(x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}$ mit einer Konstanten $V \in \mathbb{R}$ gelten. U ist bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt.

Weiterhin konvergiert u für $t \to \infty$ gegen eine translatierende Lösung, d. h. es gibt eine Konstante $h \in \mathbb{R}$ mit

$$\|u(\cdot,t) - U(\cdot,t) - h\|_{C^k(\Omega)} \to 0 \quad \text{für } t \to \infty$$

für beliebige feste $k \in \mathbb{N}$. Gibt es eine Konstante $\lambda > 0$ mit

$$\|u(\cdot,t) - U(\cdot,t) - h\|_{C^0(\Omega)} \leqslant c \cdot e^{-\lambda t}$$

für alle $t \geqslant 0$, so fallen die höheren Ableitungen ebenfalls exponentiell mit fast derselben Rate ab: Für $\varepsilon > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\|u(\cdot,t) - U(\cdot,t) - h\|_{C^k(\Omega)} \leqslant c(k,\varepsilon) \cdot e^{-(\lambda-\varepsilon)\cdot t}$$

für alle $t \geqslant 0$.

Bemerkung Dies ist eine recht allgemeine Aussage über das Langzeitverhalten von Lösungen in einer Situation in der es translatierende Lösungen geben könnte (insbesondere treten keine expliziten Abhängigkeiten von t und u auf). Um dieses Resultat anwenden zu können sind insbesondere die angegebenen a priori Schranken zu zeigen.

b.w.

(i) Sei $t_0 > 0$ beliebig. Leite — mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung — eine Differentialgleichung der Form

$$\dot{w} = a^{ij} w_{ij} + b^i w_i$$

und eine zugehörige Randbedingung für die Differenz

$$w(x, t) := u(x, t + t_0) - u(x, t)$$

her.

(ii) Zeige, dass $t \mapsto \max w(\cdot, t)$ strikt fallend oder konstant ist.

(iii) Zeige, dass

$$t \mapsto \operatorname{osc} w(\cdot, t) := \sup w(\cdot, t) - \inf w(\cdot, t)$$

strikt fallend oder konstant ist.

(iv) Zeige, dass $t \mapsto \operatorname{osc} w(\cdot, t)$ für $t \to \infty$ gegen Null konvergiert.

Hinweis: Durch zeitliche Verschiebung, Teilfolgenauswahl und mit dem schon Gezeigten kann man einen Widerspruchsbeweis führen.

Hinweis: Auf Wunsch (E-Mail) kann einen detailierteren Hinweis gegeben werden.

Hinweis: Diese Aufgabe wird fortgeführt.