Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak Universität Konstanz Wintersemester 2022

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie III

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 8

Abgabe: Bis Dienstag, 20. Dezember 2022, 10:00 Uhr bei F402

Aufgabe 8.1 (*4 Punkte*)

Sei M eine m-dimensionale C^1-Mannigfaltigkeit. Dann heißt TM trivial, falls

(i) es Vektorfelder $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ gibt, so dass die Vektoren $(v_i(x))_{1\leqslant i\leqslant m}$ für jedes $x \in M$ eine Basis von T_xM bilden.

oder

(ii) es einen Homöomorphismus $f : TM \to M \times \mathbb{R}^m$ mit $\pi_1(f(x, v)) = x$ für alle $x \in M$ gibt.

Zeige, dass $T\mathbb{S}^3$ trivial ist.

Aufgabe 8.2 (*4 Punkte*)

Sei N eine C^k-Mannigfaltigkeit. Sei $M \subset N$ eine C^k-Untermannigfaltigkeit. Zeige, dass auch TM eine C^{k-1}-Untermannigfaltigkeit von TN ist. Es reicht den Fall $k = 1$ zu betrachten.

Aufgabe 8.3 (*4 Punkte*)

Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit $\dim M < \dim N$ und sei $f : M \to N \in C^1$. Zeige, dass $f(M)$ keinen inneren Punkt besitzt, wenn M einen abzählbaren Atlas besitzt.

Aufgabe 8.4 (*4 Punkte*)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Untermannigfaltigkeit mit $n > 2\dim M + 1$. Sei

$$\Delta(M) := \{(x, y) \in M \times M : x = y\}$$

die Diagonale von M und $\sigma : (M \times M) \setminus \Delta(M) \to \mathbb{S}^{n-1}$, definiert durch

$$\sigma(x, y) = \frac{x - y}{|x - y|}\,.$$

Zeige die folgenden Aussagen:

(i) Es gibt $v \in \mathbb{S}^{n-1} \setminus \overline{\operatorname{Bild}(\sigma)}$ mit $v^n \neq 0$. *Hinweis:* Nutze Aufgabe 8.3.

(ii) Sei $P_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ die schiefe Projektion definiert durch

$$P_v(x) = x - \frac{x^n}{v^n} v\,.$$

Man kann v so wählen, dass $P_v|_M$ eine differenzierbare Einbettung wird.

(iii) Jede m-dimensionale kompakte, differenzierbare Mannigfaltigkeit kann in $\mathbb{R}^{2m+1}$ eingebettet werden. *Hinweis:* (i) und (ii).