Oliver Schnürer,
Gaspard Jankowiak Universität Konstanz Wintersemester 2022

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie III

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 7

Lösungansätze

Aufgabe 7.1 (*4 Punkte*)

(i)

$$R = g^{ij}R_{ij} = fg^{ij}g_{ij} = fg^{ij}g_{ji} = nf$$

(ii) 2. Bianchi Identität

$$0 = R_{ijkl;m} + R_{ijmk;l} + R_{ijkm;k}$$

$\times\, g^{jl}$

$$= R_{ik;m} + R_{ijmk;l}g^{jl} + \underbrace{R_{ijlm;k}g^{jl}}_{=-R_{ijml;k}g^{jl}=-R_{im;k}}$$

$\times\, g^{ik}$

$$\begin{aligned}
&= R_{;m} + \underbrace{R_{ijmk;l}}_{=-R_{jimk;l}} g^{jl}g^{ik} - R_{im;k}g^{ik} \\
&= R_{;m} + R_{jm;l}g^{jl} - R_{im;k}g^{ik} \\
&= R_{;m} - 2R_{jm;l}g^{jl}\,.
\end{aligned}$$

Außerdem

$$R_{;m} \overset{\text{oben}}{=} 2R_{jm;l}g^{jl} \overset{\text{(i)}}{=} 2g_{jm}\frac{R_{;l}}{n}g^{jl} = \frac{2}{n}R_{;m} \overset{n>2}{=} 0\,.$$

Aufgabe 7.2 (*12 Punkte*)

(i)

$$\begin{aligned}
B_{ijkl} &= g^{pr}g^{qs}R_{piqj}R_{rksl} = g^{pr}g^{qs}R_{qjpi}R_{slrk} = \underline{B_{jilk}} \\
&= g^{rp}g^{sq}R_{pkql}R_{risj} = \underline{B_{klij}}\,.
\end{aligned}$$

$$g^{jl}B_{ijkl} = g^{jl}g^{pr}g^{qs}R_{piqj}R_{rksl}$$

1. Bianchi Id.

$$\begin{aligned}
&= g^{jl}g^{pr}g^{qs}(R_{qpij} + R_{iqpj})(R_{srkl} + R_{ksrl}) \\
&= g^{jl}g^{pr}g^{qs}(R_{qpij}R_{srkl} + R_{qpij}R_{ksrl} + R_{iqpj}R_{srkl} + R_{iqpj}R_{ksrl}) \\
&= g^{jl}g^{pr}g^{qs}(R_{qpij}R_{srkl} + R_{qpij}R_{skrl} + R_{iqpj}R_{srkl} + \underbrace{R_{qipj}R_{skrl}}_{\to g^{jl}B_{ijkl}})
\end{aligned}$$

die $B_{....}$ mit g^{qs} und g^{jl} bilden

$$= g^{pr} g^{\underline{q}\underline{s}} g^{\underline{\underline{j}}\underline{\underline{l}}} (R_{\underline{q}p\underline{\underline{j}}i} R_{\underline{s}r\underline{\underline{l}}k} - R_{\underline{q}p\underline{\underline{j}}i} R_{\underline{s}k\underline{\underline{l}}r} - R_{\underline{q}i\underline{\underline{j}}p} R_{\underline{s}r\underline{\underline{l}}k}) + g^{jl} B_{ijkl}$$

Daraus folgt

$$g^{pr}(B_{pirk} - B_{pikr} - B_{iprk}) = g^{pr}(B_{ipkr} - 2B_{iprk}) = 0$$

und die Behauptung nach Umbenennung.

(ii)

$$\begin{aligned}
\Delta R_{ijkl} &= g^{pq} R_{ijkl;pq} = g^{pq}(R_{ijkl;p})_{;q} \\
&= g^{pq}(-R_{jpkl;i} - R_{pikl;j}) = g^{pq}(R_{pjkl;iq} + R_{ipkl;jq}) \\
&= g^{pq}(R_{pjkl;qi} + R_{ipkl;qj} \\
&\qquad + R^m_{piq} R_{mjkl} + R^m_{jiq} R_{pmkl} + R^m_{kiq} R_{pjml} + R^m_{liq} R_{pjkm} \\
&\qquad + R^m_{ijq} R_{mpkl} + R^m_{pjq} R_{imkl} + R^m_{kjq} R_{ipml} + R^m_{ljq} R_{ipkm}) \\
&= g^{pq}(R_{pjkl;qi} + R_{ipkl;qj} \\
&\qquad + g^{ms}(\underbrace{R_{spiq} R_{mjkl}}_{I} + \underbrace{R_{sjiq} R_{pmkl}}_{II} + \underbrace{R_{skiq} R_{pjml}}_{III} + \underbrace{R_{sliq} R_{pjkm}}_{IV} \\
&\qquad\quad + \underbrace{R_{sijq} R_{mpkl}}_{II} + \underbrace{R_{spjq} R_{imkl}}_{V} + \underbrace{R_{skjq} R_{ipml}}_{VI} + \underbrace{R_{sljq} R_{ipkm}}_{VII}))
\end{aligned}$$

(I) wird zu $R_{si} g^{ms} R_{mjkl}$,
(III) + (VII) wird zu $2B_{kilj}$,
(IV)+(VI) wird zu $2B_{likj}$,
(V) wird zu $R_{sj} g^{ms} R_{imkl}$,
(II) $= g^{jl} g^{ms}(R_{sijq} - R_{sjiq}) R_{mpkl} = (Bianchi) = 2B_{ijkl} + 2B_{ijlk}$
Terme mit kov. Ableitungen:

$$\begin{aligned}
g^{pq}(R_{pjkl;qi} + R_{ipkl;qj}) &= g^{pq}(R_{klpj;qi} + R_{klip;qj}) \\
&= -g^{pq}(R_{qkpj;li} + R_{lqpj;ki} + R_{qkip;lj} + R_{lqip;kj}) \\
&= -(R_{kl;li} - R_{li;ki} - R_{ki;lj} + R_{li;kj})
\end{aligned}$$

Kov. Ableitungen müssen noch vertauscht werden und die Behauptung folgt.

(iii) ... + Fehler, sollte $-g^{pq}$... sein ?

(iv) Aus $0 = \frac{\partial}{\partial t} \delta^i_j = \frac{\partial}{\partial t}(g^{ik} g_{kj}) = \frac{\partial}{\partial t}(g^{ik}) g_{kj} + g^{ik} \frac{\partial}{\partial t}(g_{kj})$ gilt es

$$\frac{\partial}{\partial t} g^{ij} = 2 g^{ik} g^{lj} R_{kl} .$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} R_{ijk} &= \frac{\partial}{\partial t} g^{jl} R_{ijkl} \\
&= 2 g^{jl} R_{st} g^{tl} R_{ijkl} + g^{jl} \frac{\partial}{\partial t} R_{ijkl} \\
&= 2 g^{jl} R_{st} g^{tl} R_{ijkl} + g^{jl} (\underbrace{\Delta R_{ijkl}}_{\to \Delta R_{ik}} + 2(B_{ijkl} - B_{ijkl} - B_{iljk} + B_{ikjl}) \\
&\qquad - g^{pq}(\underbrace{R_{pjkl}}_{\to R_{pk}} R_{qi} + R_{ipkl} R_{qj} + \underbrace{R_{ijpl}}_{\to R_{ip}} R_{qk} + R_{ijkp} R_{ql}))
\end{aligned}$$

...

(v)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} R &= \frac{\partial}{\partial t} g^{ik} R_{ik} \\
&= \cancel{2 g^{ir} g^{sk} R_{rs} R_{ik}} + g^{ik} \left(\Delta R_{ik} + 2 g^{pr} g^{qs} R_{piqk} R_{rs} \cancel{- 2 g^{pq} R_{pi} R_{qk}} \right) \\
&= \Delta R + g^{pr} g^{qs} R_{pq} R_{rs} \,.
\end{aligned}
$$

(vi) Nehme $\inf R(x,t) \le 0$ an. Es gibt t_0 minimal und x_0 mit $R(x_0, t_0) = 0$ (M kompakt). Es gilt $\frac{\partial}{\partial t} R(x_0, t_0) < 0$ und $R_{;ij}(x_0, t_0) \geqslant 0$. Es gilt

$$
\Delta R(x_0, t_0) = g^{ij} R_{;ij}(x_0, t_0) \geqslant 0
$$

und in (x_0, t_0)

$$
\frac{\partial}{\partial t} R = \Delta R + g^{pr} g^{qs} R_{pq} R_{rs} = \Delta R + R_{pq} R_{pq} \ge 0.
$$

Widerspruch.