Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak Universität Konstanz Wintersemester 2022

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie III

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 7

Abgabe: Bis Dienstag, 13. Dezember 2022, 10:00 Uhr bei F402

Aufgabe 7.1 (*4 Punkte*)

Sei $n \geqslant 3$ und (M^n, g) eine Mannigfaltigkeit, so dass $R_{ij} = f g_{ij}$ für eine Funktion $f \in C^\infty(M)$ gilt.

Zeige, dass

$$R_{ij} = \frac{R}{n} g_{ij}$$

gilt und dass R konstant ist.

Aufgabe 7.2 (*12 Punkte*)

Sei $n = 3$ und M^n eine glatte Mannigfaltigkeit und $g = g(t)$ eine Familie von Riemannschen Metriken, welche den Ricci-Fluss $\partial_t g_{ij} = -2R_{ij}$ lösen. Nehme an, dass für $x_0 \in M$ und $t_0 \in \mathbb{R}$ eine Karte (U, φ) von M existiert, so dass

$$g_{ij}(x_0, t_0) = \delta_{ij}\,, \qquad \Gamma^k_{ij}(x_0, t_0) = 0$$

gilt. Definiere

$$B_{ijkl} = g^{pr} g^{qs} R_{piqj} R_{rksl}\,.$$

Zeige in dem oben gewählten Koordinatensystem:

(i) Die Symmetrie

$$B_{ijkl} = B_{jilk} = B_{klij}$$

und

$$g^{jl}(B_{ijkl} - 2B_{ijlk}) = 0\,.$$

(ii) Die Identität

$$\begin{aligned}\Delta R_{ijkl} &+ 2(B_{ijkl} - B_{ijlk} - B_{iljk} + B_{ikjl}) \\ &= R_{jl;ki} - R_{jk,li} - R_{il;kj} + R_{ik;lj} + g^{pq}(R_{pjkl}R_{qi} + R_{ipkl}R_{qj})\,.\end{aligned}$$

Hinweis: Benutze die 1. und die 2. Bianchi Identität, welche lautet:

$$R_{jklm;i} + R_{kilm;j} + R_{ijlm;k} = 0\,.$$

(iii) Die Evolutionsgleichung des Riemannschen Krümmungstensors

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} R_{ijkl} = \Delta R_{ijkl} &+ 2(B_{ijkl} - B_{ijlk} - B_{iljk} + B_{ikjl}) \\ &- g^{pq}(R_{pjkl}R_{qi} + R_{ipkl}R_{qj} + R_{ijpl}R_{qk} + R_{ijkp}R_{ql})\,.\end{aligned}$$

Hinweis: Berechne zunächst $\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^k_{ij}$ und $\frac{\partial}{\partial t} R^k_{ijl}$.

(iv) Die Evolutionsgleichung der Ricci-Krümmung

$$\frac{\partial}{\partial t} R_{ik} = \Delta R_{ik} + 2g^{pr} g^{qs} R_{piqk} R_{rs} - 2g^{pq} R_{pi} R_{qk}\,.$$

b.w.

(v) Die Evolutionsgleichung der Skalarkrümmung

$$\frac{\partial}{\partial t} R = \Delta R + 2 g^{ij} g^{kl} R_{ik} R_{jl} \,.$$

(vi) Falls M kompakt ist und $R > 0$ zu Zeit $t = 0$ gilt, dann gilt dies auch für $t > 0$.