Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak Universität Konstanz Wintersemester 2022

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie III

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 5

Abgabe: Bis Dienstag, 29. November 2022, 10:00 Uhr bei F402

Aufgabe 5.1 (*4 Punkte*)

Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und G eine Gruppe von Diffeomorphismen von M mit den folgenden Eigenschaften:

(a) Ist $\mathrm{Id} \neq h \in G$, so besitzt h keinen Fixpunkt.

(b) Seien $x_n \in M$ und $g_n \in G$ mit $x_n \to x$, $g_n(x_n) \to y$ für $n \to \infty$, so existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und $g \in G$ mit $g_n = g$ für alle $n \geq n_0$ (die Gruppe G operiert diskontinuierlich auf M)

oder

(b′) G ist endlich.

Definiere eine Äquivalenzrelation "$\sim$" durch $x \sim y$, falls es ein $g \in G$ mit $g(x) = y$ gibt. Sei $\overline{M} = M/G$ der Quotientenraum bezüglich der Relation.

Zeige:

(i) Die kanonische Projektion $p : M \to \overline{M}$ ist eine Überlagerung.

(ii) Es gibt genau eine differenzierbare Struktur auf $\overline{M}$, so dass p ein lokaler Diffeomorphismus wird.

(iii) Weise die Bedingungen (a) und (b) für den folgenden Fall nach: $M = \mathbb{R}^n$ und

$$G = \{g_q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : g_q(x) = x + q \text{ für ein } q \in \mathbb{Z}^n\}.$$

Aufgabe 5.2 (*4 Punkte*)

Zeige, dass die reelle Grassmannsche Mannigfaltigkeit

$$\mathrm{Gr}_k(n) = \{V \subset \mathbb{R}^n : V \text{ ist ein } k\text{-dimensionaler Vektorraum}\}$$

eine Mannigfaltigkeit der Dimension $k(n-k)$ ist.

Aufgabe 5.3 (*Torsionstensor*) (*4 Punkte*)

Zeige, dass $T_{ij}^h := \Gamma_{ij}^h - \Gamma_{ji}^h$ ein Tensor ist.

Aufgabe 5.4 *(4 Punkte)*

Der Vektorraum $L(\mathbb{R}^n)$ aller linearen Abbildungen $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ werde mit $\mathbb{R}^{n^2}$ identifiziert.

(i) Zeige, dass die Abbildungen $(S, T) \mapsto S \circ T$ bzw. $S \mapsto S^{-1}$ von der Klasse C^∞ von $L(\mathbb{R}^n) \times L(\mathbb{R}^n)$ nach $L(\mathbb{R}^n)$ bzw. von $GL(\mathbb{R}^n)$ in sich sind.

(ii) Zeige, dass die orthogonale Gruppe $O(\mathbb{R}^n)$ eine C^∞-Untermannigfaltigkeit von $L(\mathbb{R}^n)$ ist. Berechne $TO(\mathbb{R}^n)$ und zeige, dass die Abbildung

$$Exp : T_I O(\mathbb{R}^n) \to O(\mathbb{R}^n)$$
$$S \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} S^k \,,$$

wohldefiniert, von der Klasse C^∞, und ein lokaler Diffeomorphismus bei $0 \in T_I O(\mathbb{R}^n)$ ist.

(iii) Es sei V ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ und $O_V(\mathbb{R}^n) := \{R \in O(\mathbb{R}^n) : R(V) \subset V\}$. Zeige, dass $O_V(\mathbb{R}^n)$ Untergruppe und C^∞-Untermannigfaltigkeit von $O(\mathbb{R}^n)$ ist und berechne $TO_V(\mathbb{R}^n)$.