Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak Universität Konstanz Wintersemester 2022

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie III

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 4

Abgabe: Bis Dienstag, 22. November 2024, 10:00 Uhr bei F402

Aufgabe 4.1 (*2 Punkte*)

Sei M eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge $N \subset M$ heißt n-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit von M, wenn es zu jedem $x \in N$ eine offene Umgebung $U \subset M$ und eine Karte $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^{m+n}$ mit

$$\varphi(U \cap N) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$$

gibt. Ein solches N besitzt einen C^k-Atlas, nämlich $A := \{(U \cap N, \varphi|_{U\cap N}) : (U, \varphi) \text{ wie oben}\}$. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Definiere die Abbildung

$$\Delta : M \to M \times M, \quad x \mapsto (x, x).$$

Zeige, dass $\Delta(M)$ eine Untermannigfaltigkeit von $M \times M$ ist.

Aufgabe 4.2 (*6 Punkte*)

Seien $A \subset \mathbb{R}^m$ und $B \subset \mathbb{R}^n$ offen. Seien $(g^A_{ij})_{1\le i,j\le m}$ und $(g^B_{kl})_{1\le k,l\le n}$ Metriken auf A, bzw. B.

(i) Zeige, dass $\left(g^{A\times B}_{\mu\nu}\right)_{1\le \mu,\nu\le m+n}$ mit

$$\left(g^{A\times B}_{\mu\nu}\right)_{1\le \mu,\nu\le m+n} = \begin{pmatrix} \left(g^A_{ij}\right)_{1\le i,j\le m} & 0 \\ 0 & \left(g^B_{kl}\right)_{1\le k,l\le n} \end{pmatrix}$$

eine Metrik auf $A \times B \subset \mathbb{R}^{m+n}$ ist.

Zeige, dass für den Riccitensor $\left(R^{A\times B}_{ij}\right)_{1\le \mu,\nu\le m+n}$

$$\left(R^{A\times B}_{\mu\nu}\right)_{1\le \mu,\nu\le m+n} = \begin{pmatrix} \left(R^A_{ij}\right)_{1\le i,j\le m} & 0 \\ 0 & \left(R^B_{kl}\right)_{1\le k,l\le n} \end{pmatrix}$$

gilt.

Aufgabe 4.3 (*4 Punkte*)

Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in \Omega$ und g_{ij} eine Metrik auf Ω.

Zeige, dass es eine offene Menge $\widehat{\Omega}$ und einen Diffeomorphismus $\varphi : \widehat{\Omega} \to \Omega$ gibt, sodass die zurückgezogene Metrik

$$\widehat{g}_{ij} = (\varphi^* g)_{ij} := \varphi^k_i g_{kl} \varphi^l_j$$

in x_0

$$\widehat{g}_{ij} = \delta_{ij}, \qquad \widehat{g}_{ij,k} = 0 \quad \text{und} \quad \widehat{\Gamma}^k_{ij} = 0$$

erfüllt.

Zusatz: Beweise die Aussage: Es gilt $g_{ij,k} = 0$ für alle i, j, k genau dann, wenn $\Gamma^k_{ij} = 0$ für alle i, j, k gilt.

b.w.

Aufgabe 4.4 (*Codazzi–Mainardi-Gleichungen*) (*4 Punkte*)

Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine immersierte Hyperfläche. Zeige, dass

$$h_{ij,k} - h_{ik,j} = \Gamma^l_{ik} h_{lj} - \Gamma^l_{ij} h_{lk}$$

gilt, in einem Punkt, in dem $g_{ij} = \delta_{ij}$ gilt,

Hinweis: Es ist erlaubt, in einem Punkt mit $g_{ij} = \delta_{ij}$ zu rechnen.