Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak
Universität Konstanz
Wintersemester 2022

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie III

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 3

Abgabe: Bis Dienstag, 15. November 2022, 10:00 Uhr bei F402

Aufgabe 3.1 (*4 Punkte*)

Zeige, dass die Schwarzschildsche Metrik

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} dr^2 + r^2 d\Omega^2 ,$$

die Einsteinschen Feldgleichungen im Vacuum

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0$$

löst.

Aufgabe 3.2 (*4 Punkte*)

Sei $n = 3$. Zeige die Identität

$$R_{ijkl} = g_{ik} R_{jl} - g_{il} R_{jk} - g_{jk} R_{il} + g_{jl} R_{ik} - \frac{1}{2} R \left(g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk} \right) .$$

Aufgabe 3.3 (*4 Punkte*)

Sei $\mathrm{Anti}_n = \{T = (T_{ij})_{1 \le i,j \le n} : T_{ij} = -T_{ji} \ \forall 1 \le i, j \le n\}$ der Vektorraum der antisymmetrischen $(0, 2)$-Tensoren in n Dimensionen.

(i) Finde ein Skalarprodukt auf Anti_n, so dass die Abbildung Φ mit

$$\Phi : \mathrm{Anti}_n \to \mathrm{Anti}_n ,$$
$$(\eta_{ab})_{1 \le a,b \le n} \mapsto \left(R_{ijkl} g^{ka} g^{lb} n_{ab} \right)_{1 \le i,j \le n}$$

bezüglich dieses Skalarprodukt selbstadjungiert ist. Warum liegt das Bild im angegebenen Raum?

(ii) Bestimme die Eigenwerte von Φ unter Vervendung der Eigenwerte von $(R_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ bezüglich $(g_{ij})_{1 \le i,j \le n}$.

Hinweis: Nach Wahl eines geeigneten Koordinatensystems dürfen wir $g_{ij} = \delta_{ij}$ und $R_{ij} = \mathrm{diag}(\lambda, \mu, \nu)$ annehmen.