Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak

Universität Konstanz

Wintersemester 2022

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie III

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 2

Abgabe: Bis Dienstag, 08. November 2022, 10:00 Uhr bei F402

Aufgabe 2.1 (*4 Punkte*)

Der Halbraum $\{x^n > 0\} \subset \mathbb{R}^n$ mit der Metrik

$$\frac{dx_1^2 + \ldots + dx_n^2}{x_n^2}$$

heißt hyperbolischer Raum.

Alternative: Der offene Ball $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ mit der Metrik

$$4\frac{dx_1^2 + \cdots + dx_n^2}{\left(1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2\right)^2}$$

heißt ebenfalls hyperbolischer Raum.

Bestimme alle maximalen Geodätischen im hyperbolischen Raum.

Aufgabe 2.2 (*4 Punkte*)

Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

Folgere aus der Definition $\ddot{\alpha}(t) \in (T_{\alpha(t)}M)^\perp$ und einer gewöhnlichen Differentialgleichung, dass die Geodätischen auf M auch in beliebiger Kodimension nur von der Metrik auf M abhängen und nicht von der Immersion.

Aufgabe 2.3 (*4 Punkte*)

Arbeite die Details aus Bemerkung 14.7 aus:

Bestimme, ohne Verwendung der zweiten Fundamentalform, den Riemannschen Krümmungstensor einer n-Sphäre vom Radius $r > 0$.

Zeige, dass n-dimensionale Sphären vom Radius $\sqrt{r^2 - 2(n-1)t}$ für $t \in \left[0, \frac{r^2}{2(n-1)}\right)$ den Riccifluss $\frac{\partial}{\partial_t} g_{ij} = -2R_{ij}$ lösen.

Hinweis: Nutze Aufgabe 4.4 aus Differentialgeometrie I.

Aufgabe 2.4 (*4 Punkte*)

Sei N eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. N heißt orientierbar, wenn es eine Familie von Karten von N gibt, deren Definitionsbereiche N überdecken, so dass die Determinante der Jacobi-Matrix der Kartenwechsel stets positiv ist.

Sei nun $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche. Wir sagen, dass M als Hyperfläche orientierbar ist, wenn es eine stetige Normale auf M gibt, d. h. es existiert eine stetige Abbildung $\nu : M \to \mathbb{R}^{n+1}$, so dass für $p \in M$ der Vektor $\nu(p) \in (T_pM)^\perp$ ist und $|\nu(p)| = 1$ erfüllt.

Zeige, dass eine C^2-Untermannigfaltigkeit M genau dann als Mannigfaltigkeit orientierbar ist, wenn sie als Untermannigfaltigkeit orientierbar ist.