Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak | Universität Konstanz | Wintersemester 2022

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie III

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 13

Abgabe: Bis Dienstag, 7. Februar 2023, 10:00 Uhr bei F402

Aufgabe 13.1 (*4 Punkte*)

Sei S ein $(2,2)$-Tensor. Definiere $\nabla_X S$ durch

$$\begin{aligned}\nabla_X S(U,V,\omega,\lambda) := {} & X(S(U,V,\omega,\lambda)) \\ & - S(\nabla_X U,V,\omega,\lambda) - S(U,\nabla_X V,\omega,\lambda) \\ & - S(U,V,\nabla_X\omega,\lambda) - S(U,V,\omega,\nabla_X\lambda)\,.\end{aligned}$$

Rechne nach, dass sich $\nabla_X S$ tensoriell bezüglich X und derivativ bezüglich S verhält.

Aufgabe 13.2 (*4 Punkte*)

Seien (M^2,h) eine Riemannsche 2-Mannigfaltigkeit und $u \in C^\infty(M)$. Zeige, dass $g(t) = u(t)\cdot h$ eine Lösung des Ricciflusses genau dann ist, wenn

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_h \log u - R_h$$

gilt.

Aufgabe 13.3 (*8 Punkte*)

Wir betrachten eine Mannigfaltigkeit M^2 mit einer Familie $(g_t)_t$ von Metriken, die den Riccifluss löst:

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = (r-R) g_{ij}\,. \tag{1}$$

Hier bezeichnet r den Mittelwert von R. Wir definieren auch das Volumelement $\mu = \sqrt{\det g_{ij}}$ und den Flächeninhalt $A = \int \mathrm{d}\mu$.

(i) Zeige, dass μ die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\mu = (r-R)\mu\,,$$

erfüllt.

(ii) Zeige, dass A konstant ist.

Wir nehmen jetzt an, dass r konstant ist (was aus dem Satz von Gauß-Bonnet folgt).

(iii) Schreibe g als konforme Metrik auf und zeige, dass R die Differentialgleichung

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \Delta R + (R-r)R$$

erfüllt.

b.w.

Aufgabe 13.4 (*Zusatz*) (*4 Punkte*)

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, so dass

$$g_{ij} = \delta_{ij} + u_i u_j$$

für $u \in C^\infty(M)$ gilt. Berechne Rm.