Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak | Universität Konstanz | Wintersemester 2022

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie III

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 12

Abgabe: Bis Dienstag, 31. Januar 2023, 10:00 Uhr bei F402

Aufgabe 12.1 (*4 Punkte*)

Bestimme die Schnittkrümmung des hyperbolischen Raumes, d.h. des Halbraumes $\{x^n > 0\} \subset \mathbb{R}^n$ mit der Metrik

$$\frac{dx_1^2 + \ldots + dx_n^2}{x_n^2}.$$

Aufgabe 12.2 (*4 Punkte*)

Betrachte die Metrik $g = \frac{dr^2}{V(r)} + r^2 d\Omega^2$, wobei $V : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ glatt ist und $d\Omega^2$ die Standardmetrik auf $\mathbb{S}^{n-1}$ bezeichnet. Zeige, dass die Skalarkrümmung R durch

$$R = \frac{n-1}{r^2}\left((n-2)(1 - V(r)) - rV'(r)\right)$$

gegeben ist.

Aufgabe 12.3 (*4 Punkte*)

Betrachte $M = \mathbb{R}^n$ eine glatte Mannigfaltigkeit und $F \in C^\infty(M)$. Definiere die Metrik g durch $g = D^2F$. Berechne den Riemannschen Krümmungstensor in Abhängigkeit von F.

Aufgabe 12.4 (*4 Punkte*)

Finde eine Folge $(M_i)_i$ von Mannigfaltigkeiten und eine Folge $(g_i)_i$ von Metriken, so dass $|R_{g_i}|$ beschränkt ist und

$$\mathrm{Ric}_{g_i} \to +\infty$$

für $i \to \infty$ gilt.