Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak Universität Konstanz Wintersemester 2022

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie III

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 11

Abgabe: Bis Dienstag, 24. Januar 2023, 10:00 Uhr bei F402

Aufgabe 11.1 (*8 Punkte*)

Wir setzen Aufgabe 7.2 fort, so dass $n = 3$ gilt.

(vii) Zeige, dass der Riccitensor die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} R_{ij} = \Delta R_{ij} - Q_{ij}$$

erfüllt, wobei

$$Q_{ij} = 6S_{ij} - 3RR_{ij} + (R^2 - 2S)g_{ij}\,, \quad S_{ij} = (R_{ij})^2\,, \quad S = \operatorname{Spur}(S)\,.$$

Hinweis: Benutze Aufgabe 3.2 und betrachte die Gleichung in einem Punkt, in dem der Riccitensor diagonal ist.

(viii) (a) Zeige, dass die Skalarkrümmung R die Differentialungleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} R \geqslant \Delta R + \frac{2}{3} R^2$$

erfüllt.

(b) Sei nun M kompakt und gelte $R > 0$ zur Zeit $t = 0$. Leite daraus eine Schranke an R her, die zeigt, dass es keine glatte Lösung des Ricciflusses auf $[0, \infty)$ geben kann.

Aufgabe 11.2 (*4 Punkte*)

Sei $n > 2$. Betrachte die Metrik g, die durch

$$g = dr^2 + \varphi(r)^2 d\Omega^2$$

gegeben ist, wobei $d\Omega^2$ die Standardmetrik auf $\mathbb{S}^{n-1}$ ist. Sei $r \in (0, r_0)$ für ein $r_0 > 0$. Sei $k \in \mathbb{N}$. Sei $\varphi \in C^k(0, r_0)$. Gelte $\lim\limits_{r \downarrow 0} \varphi(r) = 0$ und $\varphi(r) > 0$ für $r \in (0, r_0)$. Finde Bedingungen an φ, die sicherstellen, dass g in C^k, ist.

Aufgabe 11.3 (*4 Punkte*)

Seien (M, g) und $(N, \tilde{g})$ glatte Riemannsche Mannigfaltigkeiten und sei $\varphi : M \to N$ ein Diffeomorphismus, mit der Eigenschaft, dass für alle glatten Kurven $\gamma : [0, 1] \to M$

$$L_g(\gamma) = L_{\tilde{g}}(\varphi \circ \gamma)$$

gilt, wobei

$$L_g(\gamma) := \int_0^1 \sqrt{g(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s))}\, \mathrm{ds}$$

ist. Ein Diffeomorphismus mit dieser Eigenschaft wird als Isometrie zwischen M und N bezeichnet.

Zeige, dass

$$\varphi^* \tilde{g} = g$$

gilt.