Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak ☃ Universität Konstanz ☃ Wintersemester 2022

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie III

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 10

Abgabe: Bis Dienstag, 17. Januar 2023, 10:00 Uhr bei F402

Aufgabe 10.1 (*4 Punkte*)

Sei $M^m \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit der Klasse C^k. Für $x \in M$ sei

$$P(x) : \mathbb{R}^n \to T_x M$$

die orthogonale Projektion auf den Tangentialraum

$$T_x M := \{\alpha'(0) \mid \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \mapsto M, \alpha(0) = x\} \subset \mathbb{R}^n .$$

Sei $X_1(x), \ldots, X_m(x)$ eine Orthonormalbasis von $T_x M$. Dann ist laut Vorlesung $P(x)$ durch

$$P(x)Y = \sum_{j=1}^{m} \langle Y, X_j(x)\rangle_{\mathbb{R}^n} X_j(x)$$

gegeben.

Wir setzen $Y\colon M \to \mathbb{R}^n$ in eine Umgebung von M fort und definieren

$$\nabla_X Y(x) := P(x)\langle dY(x)\langle X(x)\rangle\rangle.$$

(i) Zeige, dass $\nabla_X Y$ von der Wahl der Fortsetzung Y unabhängig ist.

(ii) Zeige, dass $\nabla_X Y$ einen Zusammenhang definiert.

(iii) Zeige, dass $\nabla_X Y$ der Levi-Civita-Zusammenhang von M mit der von $\mathbb{R}^n$ induzierten Metrik ist.

Aufgabe 10.2 (*4 Punkte*)

Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und sei $f : M \to N$ ein C^2-Diffeomorphismus.

Zeige, dass $f_* : TM \to TN$ ein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 10.3 (*4 Punkte*)

Beweise Lemma 22.6.

Aufgabe 10.4 (*4 Punkte*)

Sei (N, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei M eine weitere Mannigfaltigkeit und $f\colon M \to N$ eine Immersion.

Stelle f^*g in Koordinaten dar und vergleiche das Resultat im Falle $N \subset \mathbb{R}^n$ mit der induzierten Metrik auf N mit bisherigen Definitionen.

b.w.

Aufgabe 10.5 (*Zusatz*) (*3 Punkte*)

Seien M, N, S differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f : M \to N$, sowie $g : N \to S$ differenzierbare Abbildungen.

(i) Zeige, dass
$$g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$$
gilt.

(ii) Ist $f : M \to N$ ein Diffeomorphismus, so gilt
$$(f^{-1})_* = (f_*)^{-1}.$$