Oliver Schnürer, Universität Konstanz Wintersemester 2021/2022
Gaspard Jankowiak

Übungen zur Vorlesung Theorie partieller Differentialgleichungen

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 6

Aufgabe 22. (4 Punkte)

(i) Sei $A \in O(n)$ und sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ eine Lösung von
$$\Delta u = f.$$
Zeige, dass $w(x) := u(Ax)$ die Differentialgleichung
$$\Delta w(x) = f(Ax)$$
für $x \in \mathbb{R}^n$ löst.

(ii) Sei $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ eine Lösung von $\dot{u} - \Delta u = 0$. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeige, dass
$$u_\lambda : \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad (x,t) \mapsto u(\lambda x, \lambda^2 t)$$
ebenfalls eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist.

Aufgabe 23. (4 Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $f \in C^0(\overline{\Omega})$. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ mit $Lu \ge f$. Hierbei betrachten wir
$$Lu(x) = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)u_{ij}(x) + \sum_{i=1}^n b^i(x)u_i(x) + d(x)u(x),$$
wobei

(i) a^{ij} symmetrisch ist, d. h. $a^{ij}(x) = a^{ji}(x)$ gilt.

(ii) L elliptisch ist: Es existiert $\lambda > 0$, so dass
$$\lambda|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\xi_i\xi_j$$
für alle $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

(iii) die Koeffizienten gleichmäßig beschränkt sind, d. h. es gibt $K > 0$, so dass
$$|a^{ij}(x)|, |b^i(x)|, |d(x)| \le K$$
für alle i, j und alle $x \in \Omega$.

Sei $d \le 0$. Zeige, dass es eine Konstante $c = c(\Omega, K, \lambda)$ gibt, so dass
$$\sup_\Omega u \le \sup_{\partial\Omega} u^+ + c \sup_\Omega |f|$$
gilt.

Aufgabe 24. (4 Punkte) Sei $T > 0$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und zusammenhängend. Erfülle
$$u \in C^2(\Omega \times (0,T)) \cap C^0\left((\Omega \times (0,T)) \cup \mathcal{P}(\Omega \times (0,T))\right)$$
die Differentialungleichung
$$\dot{u} \le Lu \quad \text{in } \Omega \times (0,T),$$
wobei wir annehmen, dass
$$Lu(x,t) = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x,t)u_{ij}(x,t) + \sum_{i=1}^n b^i(x,t)u_i(x,t) + d(x,t)u(x,t),$$
wobei

(i) a^{ij} symmetrisch ist, d. h. $a^{ij}(x,t) = a^{ji}(x,t)$ gilt.
(ii) L elliptisch ist: Es existiert $\lambda > 0$, so dass

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x,t)\xi_i\xi_j$$

für alle $x \in \Omega$, $t \in (0,T)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.
(iii) die Koeffizienten gleichmäßig beschränkt sind, d. h. es gibt $K > 0$, so dass

$$|a^{ij}(x,t)|, |b^i(x,t)|, |d(x,t)| \leq K$$

für alle i,j und alle $x \in \Omega$, $t \in (0,T)$.

a) Sei $d \leq 0$. Zeige, dass

$$\sup_{\Omega\times(0,T)} u^+ \leq \sup_{\mathcal{P}(\Omega\times(0,T))} u^+$$

gilt.
b) Zeige, dass

$$\sup_{\Omega\times(0,T)} u^+ \leq \sup_{\mathcal{P}(\Omega\times(0,T))} (e^{Kt}u^+)$$

gilt.

Aufgabe 25. (4 Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschänkt. Sei $u_0 \in C^0(\overline{\Omega})$ mit $u_0 = 0$ auf $\partial\Omega$. Sei $u \in C^2(\Omega \times (0,\infty)) \cap C^0(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$ eine Lösung von

$$\begin{cases} \dot{u} = \Delta u & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \times [0,\infty), \\ u = u_0 & \text{in } \Omega \times \{0\}. \end{cases}$$

Zeige, dass

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\Omega} |u(\cdot,t)| = 0$$

gilt.
Hinweis: Verwende, das Maximumprinzip und dass Φ aus Kapitel 7 die Wärmeleitungsgleichung löst.