Fachbereich Mathematik und Statistik
Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak

Universität Konstanz
Wintersemester 2021/22

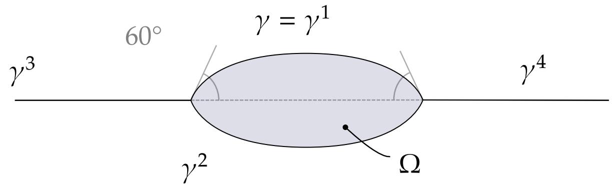
Übungen zur Vorlesung Geometrische ODEs

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 9

Aufgabe 9.1 (4 Punkte)**.** Wir betrachten $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ mit den folgenden Bedigungen:

(i) $\gamma((-1, 1)) \subset \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 : x^2 > 0\}$
(ii) $\gamma(-1), \gamma(1) \in \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = 0\}$
(iii) $\frac{\gamma'(-1)}{|\gamma'(-1)|} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \frac{\gamma'(1)}{|\gamma'(1)|} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$



Sei $\gamma^1 = \gamma$, γ^2 die Spiegelung von γ^1 an der x^1-Achse und γ^3, γ^4 die Halbgeraden mit Anfangspunkt $\gamma(-1)$ und $\gamma(1)$, wie abgebildet. Damit können wir ein symmetrisches linsenförmiges Netzwerk $\mathbb{R}^2 \supset M := \cup_i \operatorname{Im}(\gamma^i)$ definieren, wie auch die beschränkte zusammenhängende Teilmenge Ω von $\mathbb{R}^2 \setminus M$.

Betrachte nun eine Familie von solchen Netwerken $(M_t)_{0\le t\le T}$ und die entsprechen Familien $(\gamma_t)_{0\le t\le T}$, $(\Omega_t)_{0\le t\le T}$, mit $\gamma_t(-1) = (a(t), 0)$ und $\gamma_t(1) = (b(t), 0)$. Nehme an, dass es existiert $u : \mathbb{R} \times [0, T) \mapsto \mathbb{R}$ so dass $\gamma_t([-1, 1]) = \operatorname{graph} u(., t)|_{[a(t),b(t)]}$ gilt.

Wenn (M_t) sich unter dem curve shortening flow entwickelt, dann gilt für u Folgendes:

$$\begin{cases} \dot{u} = \dfrac{u_{xx}}{1 + u_x^2} & \text{im Inneres von } \bigcup\limits_{t\in[0,T)} (a(t), b(t)) \times \{t\}, \\ u(x, t) = 0 & \text{für } x \in (-\infty, a(t)] \cup [b(t), \infty) \text{ und } t \in [0, T), \\ u_x(a(\cdot), \cdot) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} & \text{in } [0, T), \\ u_x(b(\cdot), \cdot) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3} & \text{in } [0, T), \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{in } \mathbb{R}, \end{cases}$$

wobei $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist so dass

$$\begin{cases} u_0 = 0 & \text{in } (-\infty, a(0)] \cup [b(0), \infty), \\ (u_0)_x(a(0)) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}, \\ (u_0)_x(b(0)) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}. \end{cases}$$

Zeige, dass

$$|\Omega_t| = 2 \int_{a(t)}^{b(t)} u(s)\, ds \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}|\Omega_t| = -\frac{4\pi}{3}$$

gelten.

Aufgabe 9.2 (4 Punkte)**.** Lies die Bemerkungen 3.6.4 und 3.6.5 im Skript. Schreibe diese nochmals auf und ergänze dort Details, wo der Aufschrieb etwas knapp ist. Füge bei der Methode mit rotierten Graphen ein aussagekräftige Skizze hinzu.

Abgabe: Dienstag, 25.01.2022, 13:30 Uhr, in der Vorlesung.