Fachbereich Mathematik und Statistik
Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak

Universität Konstanz
Wintersemester 2021/22

Übungen zur Vorlesung Geometrische ODEs

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 6

Aufgabe 6.1 (2 Punkte)**.** Betrachte nochmals, wie auf Blatt 5, Lösungen von

$$\dot{\alpha}(t) = \left(1 + \alpha^2(t)\right)(1 - t\alpha(t)).$$

Zeige, dass es für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein Polynom P_k mit

$$\frac{d}{dt} P_k\left(\tfrac{1}{t}\right) - \left(1 + P_k^2\left(\tfrac{1}{t}\right)\right)\left(1 - tP_k\left(\tfrac{1}{t}\right)\right) \in o\left(\tfrac{1}{t^k}\right) \text{ für } t \to +\infty$$

gibt.

Aufgabe 6.2 (6 Punkte)**.** Wir suchen eine rotierende Lösung des „curve shortening flows" (eindimensionaler mittlerer Krümmungsfluss). Das heißt, wir suchen eine Kurve

$$\mathbb{R} \ni s \mapsto (x(s), y(s)) \in \mathbb{R}^2,$$

die nach der Bogenlänge parametrisiert ist ($x'^2 + y'^2 = 1$) und deren Rotation um den Ursprung in $\mathbb{R}^2$ eine Lösung des Krümmungsflusses ergibt:

$$X(s,t) := \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} \quad \text{erfüllt} \quad \langle \dot{X}, \nu \rangle = -H,$$

wobei ν und H die zu $X(\cdot, t)$ gehörige Normale bzw. (mittlere) Krümmung sind.

(1) Zeige, dass die Kurve (x, y) dann die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)' \begin{pmatrix} -y' \\ x' \end{pmatrix}$$

erfüllt.

(2) Löse die Differentialgleichung numerisch und plotte das Ergebnis.

Abgabe: Dienstag, 21.12.2021, 13:30 Uhr, in der Vorlesung.