Fachbereich Mathematik und Statistik — Universität Konstanz
Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak — Wintersemester 2021/22

Übungen zur Vorlesung Geometrische ODEs

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 4

Aufgabe 4.1 (2 Punkte)**.** Seien $a_i > 0$, $1 \le i \le n$, und $u_i \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le n$, gegeben. Zeige, dass

$$\det(a_i\delta_{ij} + u_iu_j) = \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{u_i^2}{a_i}\right)\prod_{i=1}^n a_i$$

gilt.
Hinweis: Nutze die bekannte Formel im Fall $a_i = 1$ für alle $1 \le i \le n$.
Weitergehend: Verallgemeinere dies auf den Fall $a_i \ge 0$. Wie kann man im Falle $(a_{ij} + u_iu_j)_{i,j}$ mit regulärer symmetrischer Matrix $(a_{ij})_{i,j}$ vorgehen? Was passiert, wenn $(a_{ij})_{i,j}$ nicht mehr regulär ist? (Zum Nachdenken und Besprechen in der Übung.)

Aufgabe 4.2 (6 Punkte)**.** Wir betrachten wieder die Differentialgleichung

$$f'' = f^{n-1}\left(1 - f'^2\right)^{\frac{n+2}{2}}$$

wie auf dem letzten Blatt. Wir nehmen wieder $f(0) = a > 0$ und $f'(0) = b$ mit $|b| < 1$ an. Wir erinnern uns, dass $c \equiv \left(1 - f'^2\right)^{-n/2} - f^n$ konstant ist. Beweise:

(i) Ist $c \le 1$, dann gilt $f > 0$ und $f'' > 0$ auf $\mathbb{R}$.
(ii) Ist $c > 1$, dann ändert f sein Vorzeichen.
(iii) Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit $g(0) > 0$ und $|g'| < 1$, die ebenfalls $\left(1 - g'^2\right)^{-n/2} - g^n \equiv c$ erfüllt. Zeige, dass dann $g \equiv (1 - c)^{1/n}$ gilt, was nur im Fall $c < 1$ möglich ist, oder dass $\sigma \in \{-1, 1\}$ und $t_0 \in \mathbb{R}$ existieren, sodass $g(t) = f(\sigma t + t_0)$ gilt.
Hinweis: Nutze die schon bestimmten Grenzwerte im Zusammenhang mit dieser Differentialgleichung.

Abgabe: Dienstag, 23.11.2021, 13:30 Uhr, in der Vorlesung.