Fachbereich Mathematik und Statistik | Universität Konstanz
Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak | Wintersemester 2021/22

Übungen zur Vorlesung Geometrische ODEs

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 3

Aufgabe 3.1. Wir arbeiten im Minkowski-Raum $\mathbb{R}^{n,1} \equiv \mathbb{R}^{n+1}$ mit dem „Skalarprodukt"

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i - x^{n+1} y^{n+1} .$$

Sei $M \subset \mathbb{R}^{n,1}$ der Graph der Funktion

$$u(x^1, \ldots, x^n) = \sqrt{f(x^1)^2 + |\hat{x}|^2}$$

wobei $\hat{x} = \left(x^2, \ldots, x^n\right)$ und $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ eine C^2-Funktion ist, die $f > 0$, $|f'| < 1$ erfüllt.
Bei Wahl der zukunftsweisenden Normalen und der Konvention $h_{ij} = -\left\langle X_{ij}, \nu\right\rangle$ habe die Hyperfläche M konstante Gaußkrümmung $K \equiv 1$. Zeige, dass f die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{f''}{f^{n-1}\,(1 - f'^2)^{\frac{n+2}{2}}} = 1$$

erfüllt. Folgere, dass

$$\left(1 - f'^2\right)^{-\frac{n}{2}} - f^n \equiv c$$

mit $c = \left(1 - f'(0)^2\right)^{-\frac{n}{2}} - f(0)^n$ gilt.

Aufgabe 3.2. Wir betrachten die Differentialgleichung $f'' = f^{n-1}\left(1 - f'^2\right)^{\frac{n+2}{2}}$ der vorherigen Aufgabe. Wir betrachten das Anfangswertproblem für diese Gleichung mit $f(0) = a$ und $f'(0) = b$ für $a > 0$ und $|b| < 1$.
Beweise:

(i) Es existiert eine eindeutige Lösung f des Anfangswertproblems, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist und $|f'(x)| < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt.
Hinweis: Je nach Parameterwahl ist $f > 0$ nicht überall erfüllt. Die Differentialgleichung in der Form wie in dieser Aufgabe ist aber trotzdem lösbar.

(ii) Sei $b \geq 0$. Dann gelten

$$\lim_{t\to\infty} f'(t) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{t\to\infty} f(t)^2 \left(1 - f'(t)^2\right) = 1 .$$

Abgabe: Dienstag, 16.11.2021, 13:30 Uhr, in der Vorlesung.