Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak Universität Konstanz Sommersemester 2022

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG FUNKTIONALANALYSIS II

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 6

Abgabe: Bis Montag, 11. Juli 2022, 15:00 Uhr

Aufgabe 6.1 (*4 Punkte*)

Beweise Theorem 13.3.3 aus dem Vorlesungskript.

Aufgabe 6.2 (*2 Punkte*)

Beweise Theorem 13.3.5 aus dem Vorlesungskript.

Aufgabe 6.3 (*2 Punkte*)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit einem Rand $\partial\Omega$ von der Klasse C^1. Wir definieren für $f \in L^2(\Omega)$ ein Energiefunktional durch

$$E\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto \int_\Omega \left(\tfrac{1}{2}|Du|^2 - fu\right).$$

Zeige, dass E ein eindeutiges Minimum u besitzt.

Aufgabe 6.4 (*eine Aufgabe auswählen, eine Aufgabe Zusatz — je 4 Punkte*) (*4 Punkte*)

(A) Sei $E := (e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine orthonormale Familie in einem Hilbertraum H. Wir definieren auf H einen Operator durch

$$Px := \sum_{i\in\mathbb{N}} \langle x, e_i\rangle e_i.$$

Zeige, dass P ein wohldefinierter stetiger Operator ist und dass es einen abgeschlossenen Unterraum $M \subset H$ gibt, so dass $P|_M = \mathrm{Id}_M$ und $P|_{M^\perp} = 0$ gelten.

(B) Sei $(e_i)_i$ wie in (A). Definiere

$$Qx := \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i \langle x, e_i\rangle e_{f(i)},$$

wobei $(a_i)_i \subset \mathbb{R}$ eine Nullfolge ist und $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injektiv ist. Zeige, dass Q ein wohldefinierter kompakter Operator ist.

Hinweis: Entsprechende Aussagen gelten auch für endliche Summen.

Aufgabe 6.5 (*4 Punkte*)

Sei $1 \le p < \infty$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Sei η eine Friedrichsche Glättungsfunktion, η_ε die zugehörige Diracfolge. Definiere $f_\varepsilon = f * \eta_\varepsilon$. Zeige, dass $f_\varepsilon \xrightarrow{L^p} f$ gilt.

Aufgabe 6.6 (*Zusatz*) (*4 Punkte*)

Sei $(f_k)_k \subset W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ so dass $f_k \xrightarrow{L^2} f$ und $(\nabla f_k)_i \xrightarrow{L^2} g_i$ für $k \to \infty$.
Zeige, dass $f \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ und $g_i = (\nabla f)_i$ gelten.