Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak
Universität Konstanz Sommersemester 2022

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 5

Abgabe: Bis Montag, 27. Juni 2022, 15:00 Uhr

Aufgabe 5.1 (*4 Punkte*)

(i) Sei $g \in L^1((0,1))$. Beweise, dass $u(x) := \int_0^x g$ im Raum $W^{1,1}((0,1))$ liegt und dass $u' = g$ gilt.
Hinweis: Approximiere g durch $C^0([0,1])$-Funktionen.

(ii) Sei $u \in W^{1,1}((0,1))$. Beweise, dass u einen auf $[0,1]$ stetigen Repräsentanten besitzt (wieder mit u bezeichnet) und dass dieser $u(x) = u(0) + \int_0^x u'$ erfüllt.
Hinweis: Gilt $u \in L^1_{\text{loc}}((0,1))$ und $Du = 0$, ist u fast überall konstant.

Aufgabe 5.2 (*4 Punkte*)

(i) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit einem Rand $\partial\Omega$ von der Klasse C^1. Zeige, dass der Divergenzsatz
$$\int\limits_\Omega \operatorname{div} \xi = \int\limits_{\partial\Omega} \langle \xi, \nu \rangle$$
auch für $\xi \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ gilt, $1 \le p < \infty$, wenn man $\xi|_{\partial\Omega}$ im Sinne des Spursatzes versteht.

(ii) Bezeichne $T_p \colon W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ die Spuroperatoren. Seien $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Beweise, dass für $u \in W^{1,p}(\Omega)$ und $v \in W^{1,q}(\Omega)$ folgende Identität gilt:
$$\int_\Omega (u_i \cdot v) + \int_\Omega (u \cdot v_i) = \int_{\partial\Omega} (T_p u \cdot T_q v \cdot \langle \nu, e_i \rangle).$$

Aufgabe 5.3 (*4 Punkte*)

Wir setzen $\mathbb{R}^n_+ := \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \colon x^n > 0\}$ und $\mathbb{R}^n_- := \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \colon x^n < 0\}$. Sei $1 \le p < \infty$ und seien $u_+ \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ und $u_- \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n_-)$ Funktionen mit beschränktem Träger. Wir nehmen an, dass $u_+ = u_-$ in $L^p(\{x^n = 0\})$ im Sinne des Spursatzes gilt. Zeige, dass dann $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ gilt, wobei u durch $u|_{\mathbb{R}^n_+} = u_+$ und $u|_{\mathbb{R}^n_-} = u_-$ definiert ist.

Aufgabe 5.4 (*4 Punkte*)

Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Seien $u \in W^{1,p}(\Omega)$ und $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus. Zeige, dass $u \circ \Phi \in W^{1,p}(\Phi^{-1}(\Omega))$ gilt.