Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak
Universität Konstanz Sommersemester 2022

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 4

Abgabe: Bis Montag, 06. Juni 2022, 15:00 Uhr

Aufgabe 4.1 (*6 Punkte*)

(i) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer, offen und beschränkt. Seien $0 < \alpha, \beta \leq 1$ und $k, m \in \mathbb{N}$ mit $k + \alpha < m + \beta$. Zeige dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Konstante $c_\varepsilon > 0$ gibt, so dass für alle $u \in C^{m,\beta}$ folgende Ungleichung gilt:

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq \varepsilon \|u\|_{C^{m,\beta}(\overline{\Omega})} + c_\varepsilon \|u\|_{C^0(\overline{\Omega})}.$$

(ii) Sei nun $k = 0$, $0 < \alpha <= 1$ und Ω ein Interval. Zeige, dass $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ ein Banachraum ist. Zeige, dass dieser nicht separabel ist.

Aufgabe 4.2 (*4 Punkte*)

Sei $\mathbb{R}^n_+ := \{(\hat{x}, x^n) \equiv (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n \colon x^n > 0\}$ der Halbraum. Sei $u \in C^k(\overline{\mathbb{R}^n_+})$. Zeige mit Hilfe einer Spiegelung höherer Ordnung, dass es eine Fortsetzung $\tilde{u} \in C^k(\mathbb{R}^n)$ von u gibt, d. h. es gilt $\tilde{u}|_{\mathbb{R}^n_+ = u}$. Außerdem gibt es $c(k) > 0$, so dass $\|\tilde{u}\|_{C^k(\mathbb{R}^n)} \leq c(k) \|u\|_{C^k(\mathbb{R}^n_+)}$ gilt.
Hinweis: Mache für $x^n < 0$ den Ansatz

$$\tilde{u}(\hat{x}, x^n) = \sum_{i=1}^{k+1} c_i \, u(\hat{x}, -\tfrac{1}{i} x^n).$$

Aufgabe 4.3 (*4 Punkte*)

Sei $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend. Zeige, dass eine schwach differenzierbare Funktion $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, die $Du = 0$ erfüllt, fast überall konstant ist.

Aufgabe 4.4 (*2 Punkte*)

Sei $1 \leq p < n$. Zeige, dass eine Ungleichung der Form

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq c(n, p) \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

nur dann für alle Funktionen $u \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$ richtig sein kann, wenn $p^* = \frac{np}{n-p}$ gilt.
Hinweis: Betrachte eine Funktionenfamilie der Form $u_\lambda(x) = u(\lambda x)$.