Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak Universität Konstanz Sommersemester 2022

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 3

Abgabe: Bis Montag, 16. Mai 2022, 15:00 Uhr

Aufgabe 3.1 ***Banach-Saks Eigenschaft*** (*4 Punkte*)

Seien H ein Hilbertraum, $(x_n)_k \subset H$ und $x \in H$ so dass $x_n \rightharpoonup x$ gilt. Zeige, dass es eine Teilfolge $(x_{n_k})_k$ gibt, so dass die Folge $(y_k)_k$ die durch

$$y_k = \frac{1}{k} \sum_{m=1}^{k} x_{n_k}$$

definiert ist, gegen x konvergiert.

Hinweis:

(i) Zeige, dass es genugend ist, den Fall $x = 0$ zu betrachten.

(ii) Zeige, dass es eine Teilfolge (x_{n_k}) mit $n_1 < \cdots < n_k < \ldots$ gibt, so dass

$$\forall k, j \in \mathbb{N}^*, \quad k > j \Rightarrow |\langle x_{n_j}, x_{n_k} \rangle| \leq \frac{1}{k}$$

gilt.

(iii) Sei $C = \sup \|x_n\|$. Zeige, dass

$$\left\| \frac{x_{n_1} + \ldots + x_{n_k}}{k} \right\|^2 \leq \frac{C^2 + 2}{k}$$

gilt und führe den Beweis zu Ende.

Aufgabe 3.2 ***Charakterisierung Lipschitzstetiger Funktionen*** (*4 Punkte*)

Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir werden zeigen, dass die folgenden Behauptungen äquivalent sind:

(a) F ist Lipschitzstetig.

(b) Es gibt $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, so dass $F(x) = F(0) + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

(i) Zeige, dass (b) $\Rightarrow$ (a).

(ii) Nehme an, dass F Lipschitzstetig ist.

   (a) Zeige, dass für $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} F(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

   gilt.

   (b) Schließe daraus, dass es $C > 0$ gibt, so dass es für alle Testfunktionen $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R})$

$$\left| \int_{\mathbb{R}} F(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq C \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|\,\mathrm{d}x$$

   gilt.

(c) Zeige, dass es $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ gibt, so dass es für alle Testfunktionen $\int_R F(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int f(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ gilt, und führe den Beweis zu Ende.

Aufgabe 3.3 (*4+2 Punkte*)

Seien $(B_1, \|\cdot\|_1), (B_2, \|\cdot\|_2), (B_3, \|\cdot\|_3)$ drei Banachräume, so dass

$$B_1 \underset{i}{\hookrightarrow} B_2 \underset{j}{\hookrightarrow} B_3$$

gilt, wobei $i : B_1 \to B_2$ eine kompakte, lineare und injective und $j : B_2 \to B_3$ eine stetige, lineare und injective Abbildung sei. Zeige, dass es für alle $\varepsilon > 0$ eine Konstante $c_\varepsilon > 0$ gibt, so dass für alle $u \in B_1$ die Ungleichung

$$\|i(u)\|_2 \leq \varepsilon\|u\|_1 + c_\varepsilon\|j \circ i(u)\|_3$$

erfüllt ist.
Zusatz: Seien $x, y, z > 0$. Beweise die Äquivalenz der Aussagen

(i) Es existieren Konstanten $c, \alpha > 0$, so dass $z \leq \varepsilon x + c\,\varepsilon^{-\alpha} y$ für alle $\varepsilon > 0$ gilt.

(ii) Es existieren Konstanten $c, p, q > 0$ mit $p + q = 1$, so dass $z \leq c\,x^p y^q$ gilt.

Aufgabe 3.4 (*4 Punkte*)

Seien $k, n \in \mathbb{N}$ und sei $1 < p < \infty$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zeige, dass $W^{k,p}(\Omega)$ reflexiv ist.