Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak
Universität Konstanz Sommersemester 2022

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 2

Abgabe: Bis Montag, 25. April 2022, 15:00 Uhr

Aufgabe 2.1 (*4 Punkte*)

(i) Finde ein Gegenbeispiel zu Bemerkung 8.2.5 im Skript. Das heißt, finde eine beschränkte abgeschlossene nicht konvexe Teilmenge M eines Hilbertraumes H, die nicht schwach folgenkompakt ist.

(ii) Finde ein Gegenbeispiel zu Lemma 8.2.7. Das heißt, finde eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell^2(\mathbb{N})$ so dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komponentenweise, aber nicht schwach, konvergiert.

Aufgabe 2.2 (*4 Punkte*)

(i) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell^1(\mathbb{N})$. Zeige, dass aus $x_n \rightharpoonup x$ bereits $x_n \to x$ folgt.
Hinweise:
  (a) Es darf angenommen werden, dass $(\ell^1(\mathbb{N}))^* = \ell^\infty(\mathbb{N})$ gilt.
  (b) Nehme an, es existiert eine Folge mit $x_n \rightharpoonup 0$ und $\|x_n\| \geq \delta > 0$, und führe dies zu einem Widerspruch. Betrachte zuerst den Fall disjunkter Träger, dass heißt $\operatorname{supp} x_n \cap \operatorname{supp} x_m = \emptyset$ für $n \neq m$, wobei $\operatorname{supp} x_n = \{i \in \mathbb{N} : x_n^{(i)} \neq 0\}$.
  (c) Wähle im allgemeinen Fall zunächst eine Teilfolge, deren Träger „fast“ disjunkt sind.

(ii) Finde eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1((0,1))$ mit $u_n \rightharpoonup 0$ und $u_n \not\to 0$.
Hinweise:
  (a) Nach Theorem 3.5.1 aus dem Vorlesungsskript gilt $(L^1((0,1)))^* = L^\infty((0,1))$.
  (b) Betrachte Sägezahnfunktionen oder Burgzinnenfunktionen und benutze das Lemma von Riemann-Lebesgue: Es gilt $\lim_{s\to\pm\infty} \int_0^1 f(t)e^{ist}\,\mathrm{d}t = 0$ für $f \in L^1((0,1))$.

Aufgabe 2.3 (*4 Punkte*)

Wir sagen ein Banachraum X ist *gleichmäßig konvex*, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x, y \in X$ mit $\|x\| = \|y\| = 1$ und $\|\frac{1}{2}(x+y)\| > 1-\delta$ bereits $\|x-y\| < \varepsilon$ gilt.

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein gleichmäßig konvexer Banachraum. Sei $x \in X$ und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $x_n \rightharpoonup x$ und $\|x_n\| \to \|x\|$. Zeige, dass hieraus $x_n \to x$, also $\|x_n - x\| \to 0$, folgt.

Aufgabe 2.4 (*4 Punkte*)

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, und bezeichne mit $B_1(0)$ den offenen Einheitsball im $\mathbb{R}^n$. Sei

$$u : B_1(0) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log\log\left(1 + \frac{1}{|x|}\right).$$

Zeige, dass $u \in W^{1,n}(B_1(0))$ gilt.