Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak Universität Konstanz Sommersemester 2022

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie II

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 6

Abgabe: Bis Montag, 18. Juli 2022, 15:00 Uhr

Aufgabe 6.1 (*4 Punkte*)

Beweise Lemma 10.1.4 aus der Vorlesung (Unabhängigkeit des mittleren Krümmungsflusses von der Kartenwahl).

Aufgabe 6.2 (*4 Punkte*)

Sei $u\colon \bigcup_{t\in[0,T)}[a(t),b(t)]\times\{t\}\to\mathbb{R}$ die graphische Darstellung einer Lösung des eindimensionalen mittleren Krümmungsflusses. Zeige, dass die Zeitableitung der nach oben überstrichenen Fläche (nach unten überstrichene Fläche wird negativ gewertet) durch

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{a(t)}^{b(t)} u(x,t)\,\mathrm{d}x-\int_{a(0)}^{b(0)} u(x,0)\,\mathrm{d}x+\int_0^t u(a(\tau),\tau)\,a'(\tau)\,\mathrm{d}\tau-\int_0^t u(b(\tau),\tau)\,b'(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\\ &=\int_{a(t)}^{b(t)} u_t(x,t)\,\mathrm{d}x\\ &=\arctan u_x(b(t),t)-\arctan u_x(a(t),t)\end{aligned}$$

gegeben ist.
Hinweis: $\arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}$.
Zusatz: Sei $(M_t)_{t\in[0,T)}$ eine Familie von eingebetteten, geschlossenen, konvexen Kurven im $\mathbb{R}^2$, die den mittleren Krümmungsfluss erfüllt. Beweise, dass die eingeschlossene Fläche $A(t)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t)=-2\pi\quad\text{erfüllt.}$$

Aufgabe 6.3 (*4 Punkte*)

Beweise: Sei $u\colon\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$ eine Funktion mit $\mathrm{D}u\neq 0$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) Es gilt
$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)=-\frac{1}{|\nabla u|}\,.$$

(ii) Die Niveauflächen $M_t:=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}: u(x)=t\}$ erfüllen den mittleren Krümmungsfluss.

Zeige weiter, dass für einen mittleren Krümmungsfluss $(M_t)_t$, der $H>0$ und $M_t\cap M_{t'}=\emptyset$ für $t\neq t'$ erfüllt, eine Funktion u wie oben (definiert auf einer Teilmenge des $\mathbb{R}^{n+1}$) durch das Setzen von $u(x)=t$, falls $x\in M_t$ gilt, gegeben ist.

b.w.

Aufgabe 6.4 *(4 Punkte)*

(i) Beweise, dass $(\operatorname{graph} u(\cdot, t))_{t\in\mathbb{R}}$ mit $u(x,t) = -\log\cos x + t$, $(x,t) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \mathbb{R}$ eine Lösung des mittleren Krümmungsflusses ist.

(ii) Zeige, dass die Familie $(M_t)_{t<0}$ gegeben durch

$$M_t = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \mathrm{e}^t \cosh(y) = \cos(x)\right\}$$

den mittleren Krümmungsfluss erfüllt.