Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak Universität Konstanz Sommersemester 2022

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie II

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 5

Abgabe: Bis Montag, 04. Juli 2022, 15:00 Uhr

Aufgabe 5.1 (*4 Punkte*)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $X\colon \Omega\times(-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine C^2-Abbildung, so dass $X(\cdot,0)$ eine Immersion ist.

(i) Sei $\Omega' \Subset \Omega$ offen. Zeige, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $X(\cdot,t)\colon \Omega' \to \mathbb{R}^{n+1}$ für alle $|t| < \delta$ ebenfalls eine Immersion ist.

(ii) Sei nun $X(\cdot,t)$ für alle $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ eine Immersion. Nehme an, dass es ein $F\colon \Omega\times(-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}$ mit $\frac{\partial X}{\partial t} = -F\nu$ gibt. Zeige, dass dann

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2Fh_{ij} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \nu}{\partial t} = X_i g^{ij} F_j \quad \text{gelten.}$$

Aufgabe 5.2 (*4 Punkte*)

Zeige, dass der Graph von x abgebildet auf $|x|^\alpha$ für $\alpha \in (1,2)$ keine Tubenumgebung um die Null hat; die signierte Distanzfunktion ist also in keiner Umgebung der Null von der Klasse C^1. Dies zeigt, dass die Bedingung $\partial\Omega \in C^k$ für $k \ge 2$ für die Tubenumgebung scharf ist.

Aufgabe 5.3 (*4 Punkte*)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $\partial\Omega \in C^\infty$. Zeige, dass auf $\partial\Omega$

$$\nabla\Delta\frac{d^2}{2} = H\nu \text{ gilt.}$$

Gelte $f \equiv 0$ auf $\partial\Omega$ für eine Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Zeige, dass dann auf $\partial\Omega$ für Tangentialvektoren v, w

$$\begin{aligned} \mathrm{D}f\,\langle v\rangle &= 0 \text{ und} \\ \mathrm{D}^2 f\,\langle v,w\rangle &= \mathrm{D}f\,\langle \nabla d\rangle\ \mathrm{D}^2 d\,\langle v,w\rangle \text{ gelten.} \end{aligned}$$

Aufgabe 5.4 (*4 Punkte*)

Eine Funktion heißt *eigentlich*, falls Urbilder kompakter Mengen kompakt sind.
Für $A \in \mathbb{R}^n$ sei $A_\varepsilon := \bigcup_{x\in A} \overline{B_\varepsilon(x)}$. Für nichtleere Mengen $A, A' \in \mathbb{R}^n$ definiere den *Hausdorffabstand* durch

$$d_{\mathcal{H}}(A,A') := \inf\{\varepsilon \ge 0 : A \subset A'_\varepsilon \text{ und } A' \subset A_\varepsilon\}\,.$$

Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ eigentlich und sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C^1(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \rightrightarrows f$ und $\mathrm{D}f_k \rightrightarrows \mathrm{D}f$. Es gelte $\mathrm{D}f(x) \ne 0$ für alle $x \in M := f^{-1}(\{0\})$. Wir setzen außerdem $M_k := f_k^{-1}(\{0\})$.

(i) Beweise $d_{\mathcal{H}}(M_k, M) \to 0$ für $k \to \infty$.

(ii) Zeige, dass M_k für hinreichend große $k \in \mathbb{N}$ eine C^1-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist.

(iii) Zeige, dass die lokalen Graphendarstellungen der M_k im C^1_{loc}-Sinne gegen die von M konvergieren.