Oliver Schnürer, Universität Konstanz Sommersemester 2022
Gaspard Jankowiak

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie II

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 4

Abgabe: Bis Montag, 20. Juni 2022, 15:00 Uhr

Aufgabe 4.1 (*4 Punkte*)

Sei $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $u(x, y) := (x^2 - 1)^2 + y^2$ gegeben.

(i) Skizziere oder beschreibe $\operatorname{graph} u$.

(ii) Stelle $u^{-1}(\{9\})$ beim Punkt $(-2, 0)$ lokal als Graph dar.

(iii) Für welche $c \geq 0$ ist $u^{-1}(\{c\})$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$? Beweise deine Aussagen!

Aufgabe 4.2 (*5 Punkte*)

Sei $n \geq 2$ und sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine immersierte Hyperfläche. Seien $0 \in \Omega$ und $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass $X(0) = 0$, $\nu(0) = e_{n+1}$ und $\xi^i X_i(0) \parallel e_n$ gelten.

(i) Zeige, dass es eine reguläre Kurve $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \Omega$ mit $\alpha(0) = 0$ und $\alpha'(0) = \xi$ gibt, so dass $\operatorname{im}(X \circ \alpha) \subset \operatorname{span}(e_n, e_{n+1})$ gilt.

(ii) Zeige, dass der Betrag der Krümmung der Kurve $X \circ \alpha$ bei 0 durch $\left|\frac{h_{ij}(0)\,\xi^i\,\xi^j}{g_{ij}(0)\,\xi^i\,\xi^j}\right|$ gegeben ist.

Aufgabe 4.3 (*4 Punkte*)

Sei $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre C^2-Kurve. Seien $v_1, v_2 \in S^1$ mit

$$\frac{\alpha'(0)}{|\alpha'(0)|} = v_1 \quad \text{und} \quad \frac{\alpha'(1)}{|\alpha'(1)|} = v_2\,.$$

Welche Werte kann

$$\int_0^1 k(s)\,\mathrm{d}s$$

annehmen?

Aufgabe 4.4 (*7 Punkte*)

Sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre C^2-Kurve. Sei α periodisch mit Periode 1 und gelte überall $k > 0$. Sei

$$\int_0^1 k(s)\,\mathrm{d}s = 2\pi\,.$$

(i) Zeige, dass $\alpha|_I$ für jedes Interval mit Länge L(I) < 1 eine Einbettung ist.

(ii) Zeige, dass $\mathbb{R}^2 \setminus \operatorname{im}\alpha$ in genau zwei Zusammenhangskomponenten zerfällt, von denen genau eine beschränkt ist. Zeige, dass die beschränkte Zusammenhangskomponente konvex ist.

Hinweis:

(i) *Zeige mit Aufgabe 4.1, dass $T|_I$ injektiv ist. Schliesse daraus, dass $\alpha|_I$ injektiv ist.*

(ii) *Sei* $x_0 \in \operatorname{im}\alpha$. *Betrachte* $H \ni x_0$ *eine geschlossene Halbebene, die tangent zu* $\operatorname{im}\alpha$ *in* x_0 *ist. Warum gilt es* $\operatorname{im}\alpha \cap H = \operatorname{im}\alpha$? *Mache eine Skizze dazu. Schliesse daraus die Existenz genau einer unbeschränkten Zusammenhangskomponente, deren Komplement konvex ist. Zeige mit H und einer Tubenumgebung, dass diese Menge (das Komplement) nicht leer ist.*

Aufgabe 4.5 (*Zusatz*) (*4 Punkte*)

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Wir definieren die Distanzfunktion d von A durch $d(x) := \min_{a\in A} |x-a|$. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und nehme an, dass d an der Stelle x differenzierbar ist. Beweise, dass es dann einen eindeutigen Punkt $a \in A$ mit $d(x) = |x-a|$ gibt.