Oliver Schnürer, Gaspard Jankowiak
Universität Konstanz Sommersemester 2022

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie II

Abrufbar unter: `https://gaspard.janko.fr/de`

Blatt 2

Abgabe: Bis Montag, 2. Mai 2022, 15:00 Uhr

Aufgabe 2.1 (*4 Punkte*)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre C^2-Kurve.

(i) Nehme an, dass $|\alpha(t)|$ an der Stelle t_0 ein lokales Maximum hat. Zeige, dass dann

$$|\kappa(t_0)| \geq \frac{1}{|\alpha(t_0)|}$$

gilt, wobei $\kappa : I \to \mathbb{R}$ die Krümmung von α ist.

(ii) Nehme nun an, dass für ein $s_0 \in I$ und ein $r > 0$ die Bedingungen

$$\alpha(s_0) = (r, 0)\,, \quad \alpha'(s_0) = (0, 1)\,, \quad \text{sowie} \quad \kappa(s_0) > \frac{1}{r}$$

gelten. Zeige, dass die Kurve α lokal um s_0 innerhalb der abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{B_r(0)}$ liegt.

Hinweis für beide Teilaufgaben: Untersuche die Funktion $\frac{1}{2}|\alpha(t)|^2$.

Aufgabe 2.2 (*12 Punkte*)

Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ heiße *stückweise C^1-zusammenhängend*, wenn es zu je zwei Punkten $p, q \in X$ eine stückweise C^1-Kurve gibt, die in X verläuft und diese beiden Punkte verbindet. Wir schreiben $\Gamma(p, q)$ für die stückweisen C^1-Kurven, die p und q verbinden, und $L(\gamma)$ für deren Länge.

(i) Zeige, dass $\mathbb{R}^n$ selbst und $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ stückweise C^1-zusammenhängend sind. (*1 Punkt*)

(ii) Zeige, dass auf einer C^1-zusammenhängenden Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ durch

$$d(p, q) = \inf_{\gamma \in \Gamma(p,q)} L(\gamma)$$

eine Metrik definiert ist, der sogenannte *geodätische Abstand*. (*2 Punkte*)

(iii) Gib ein Beispiel, bei dem das Infimum nicht angenommen wird. (*2 Punkte*)

(iv) Beweise, dass im Fall $X = \mathbb{R}^n$ ein Geradenstück einen Minimierer für obige Definition der Metrik liefert. Zeige außerdem, dass die so gewonnene Metrik mit der euklidischen Standardmetrik zusammenfällt. (*2 Punkte*)

(v) Zeige, dass auch im Fall $X = \mathbb{S}^{n-1}$ ein Minimierer für das Infimum existiert. (*4 Punkte*)

(vi) Nehme an, die Erdoberfläche sei eine Kugel mit Radius $r = 6,371 \cdot 10^6\mathrm{m}$. Bestimme den Abstand vom Konstanzer Münster ($47°39'48''$ nördlicher Breite, $9°10'34''$ östlicher Länge) zum Nordpol. (*1 Punkt*)