Übungen Lineare Algebra und Analytische Geometrie

Blatt 4 **11.4.2024**

16. (a) Berechnen Sie den Winkel, den zwei Raumdiagonalen eines Würfels einschließen.
    (b) Gegeben sind zwei Kreise mit Radien $r, \sqrt{3}r$ und Zentralabstand $\frac{11}{5}r$. Unter welchem Winkel schneiden die beiden Kreise einander? Geben Sie Ihr Resultat in Grad an.

17. $\mathbb{R}^4$ sei versehen mit dem Standardskalarprodukt und

$$U = \left\{ t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t_4 \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + t_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

    (a) Berechnen Sie $U^\perp$.
    (b) Berechnen Sie $(U^\perp)^\perp$ und weisen Sie nach, daß dieser Unterraum mit U übereinstimmt.

18. Gegeben ist der euklidische Vektorraum $V := \{f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$ mit dem inneren Produkt $\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n \in V$ definiert durch

$$f_n(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx).$$

    (a) Zeigen Sie, daß $\{f_n \in V \mid n \in \mathbb{N}\}$ ein Orthonormalsystem, aber keine Orthonormalbasis von V bildet.
    (b) Berechnen Sie für $n \neq m$ den Abstand zwischen f_n und f_m.

19. Gegeben sind die Vektoren

$$u = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \\ \xi^2 \end{pmatrix}, \quad u = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ \xi^2 \\ \xi^4 \end{pmatrix},$$

mit $\xi = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Zeigen Sie, daß u, v, w eine Orthonormalbasis des $\mathbb{C}^3$ bezüglich des Standardskalarprodukts bilden.

20. Sei $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2,$$

und

$$b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

    (a) Finden Sie eine Matrix A, sodaß $g(x, y) = x^\top Ay$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$ gilt.
    (b) Zeigen Sie, daß durch $\langle x, y\rangle := g(x, y)$ ein inneres Produkt definiert ist.
    (c) Zeigen Sie, daß $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ eine Orthonormalbasis bezüglich des inneren Produkts aus (b) bildet.
    (d) Sei $x = (-7, 3)^\top$. Berechnen Sie $[x]_\mathcal{B}$ auf zwei Arten: i) Wie bisher mit Satz 1.3, ii) mit Satz 2.18.2.