Übungen Lineare Algebra und Analytische Geometrie
Blatt 3 **21.3.2024**

11. Welche der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sind zueinander ähnlich? *Hinweis:* Untersuchen Sie $SA = BS$ etc.

12. (a) Seien $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times \ell}$. Zeigen Sie $(AB)^* = B^*A^*$ nur unter Verwendung der Schreibweise $M = (m_{ij})$ für Matrizen.

    (b) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertierbar. Zeigen Sie, daß dann auch A^* invertierbar ist und $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ gilt.

13. (a) Seien V_1 und V_2 zwei reelle Vektorräume. Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle_2 : V_2 \times V_2 \to \mathbb{R}$ ein inneres Produkt auf V_2 und $f : V_1 \to V_2$ eine lineare Abbildung. Wir definieren

    $$\langle\cdot,\cdot\rangle_1 : V_1 \times V_1 \to \mathbb{R}, \quad \langle x, y\rangle_1 := \langle f(x), f(y)\rangle_2.$$

    Zeigen Sie: $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ ist ein inneres Produkt genau dann, wenn f injektiv ist.

    (b) Wir definieren die Abbildung

    $$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}, \quad \langle A, B\rangle := \mathrm{Spur}(A^\top B).$$

    Finden Sie einen Ausdruck für $\langle A, B\rangle$ nur in Termen der Matrixelemente und beweisen Sie mithilfe von (a), daß $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein inneres Produkt auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist.

14. Berechnen Sie jene Punkte auf der Geraden

    (a) $g : -x + 2y = 4,$ (b) $h : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R},$

    die im normierten Raum $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ vom Punkt $P = (0, -1)$ minimalen Abstand haben.

15. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und $\|\cdot\|$ die induzierte Norm auf V. Weiters seien $a, b \in V$, $a \neq b$ fest, $c = \frac{1}{2}(a + b)$, und $x \in V$ beliebig. Zeigen Sie folgende Äquivalenzen und geben Sie für $V = \mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt eine geometrische Interpretation:

    (a) $\langle x - a, x - b\rangle = 0 \iff \|x - c\| = \dfrac{1}{2}\|b - a\|.$

    (b) $\|x - a\| = \|x - b\| \iff \langle x - c, b - a\rangle = 0.$