Übungen Lineare Algebra und Analytische Geometrie
Blatt 2 **14.3.2024**

6. Die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch
$$\varphi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x_3 - x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie $[\varphi]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ mit den Basen
$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \mathcal{C} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix})$$
durch Lösen der Gleichungssysteme $\varphi(b_i) = \sum_{j=1}^{2} a_{ji} c_j$, $i = 1, ..., 4$.

7. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit $\dim V = n$, $\mathcal{B}$ eine Basis von V, und $\iota_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{K}^n$, $\iota_{\mathcal{B}}(x) = [x]_{\mathcal{B}}$.
   (a) Zeigen Sie: $\iota_{\mathcal{B}}$ ist linear.
   (b) Zeigen Sie: $\iota_{\mathcal{B}}$ ist injektiv.
   (c) Geben Sie die Matrix $[\iota_{\mathcal{B}}]_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ an, wobei $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ mit $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)^\top$, 1 das Einselement in $\mathbb{K}$ an der i-ten Stelle von e_i, die Standardbasis des $\mathbb{K}^n$ über $\mathbb{K}$ bezeichnet.

8. $\mathcal{E}_4$ bzw. $\mathcal{E}_2$ bezeichnen die Standardbasen des $\mathbb{R}^4$ bzw. $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie $[\varphi]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ aus Übung 6 durch Multiplikation der Matrix $[\varphi]_{\mathcal{E}_4,\mathcal{E}_2}$ mit geeigneten Basiswechselmatrizen in $\mathbb{R}^4$ bzw. $\mathbb{R}^2$.

9. Gegeben ist die Abbildung $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $f(X) = X - 3X^\top$.
   (a) Zeigen Sie, daß f linear ist.
   (b) Es sei
   $$\mathcal{E} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$
   die Standardbasis des $\mathbb{R}^{2\times 2}$ über $\mathbb{R}$ und
   $$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right)$$
   eine weitere geordnete Basis des $\mathbb{R}^{2\times 2}$ über $\mathbb{R}$. Bestimmen Sie $[f]_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$.

10. Gegeben ist die Abbildung f aus Übung 9.
   (a) Zeigen Sie, daß f bijektiv ist und geben Sie f^{-1} an.
   (b) Berechnen Sie $[f^{-1}]_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$ mit den Basen $\mathcal{E}$ und $\mathcal{B}$ aus Übung 9 und überzeugen Sie sich davon, daß diese Matrix mit der Matrix $[f]^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ übereinstimmt.